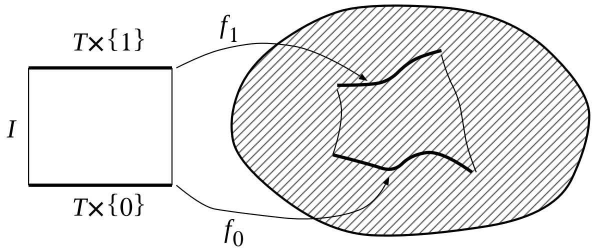
幾何入門　第５回

情報科学科　金子　晃
А л е к с е й　К А Н Е Н К О
kanenko@is.ocha.ac.jp
この講義のホームページ:
http://atom.is.ocha.ac.jp/~kanenko/KOUGI/Geo
この講義のホームディレクトリ:
edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo

ホモトピー

連続的変形の数学化：
二つの連続写像 $f_0, f_1 : T \to M$ がホモトピー同値 (homotopic) とは,
f_0 を連続的に変形して f_1 に持って行けること
i.e. $\exists F : T \times I \to M$ 　(T と単位区間 $I = [0,1]$ の直積からの連続写像)
　s.t. $F(x,0) = f_0(x)$, $F(x,1) = f_1(x)$.
このとき $f_0 \simeq f_1$ と記す. F を f_0 と f_1 の間のホモトピー写像と呼ぶ.



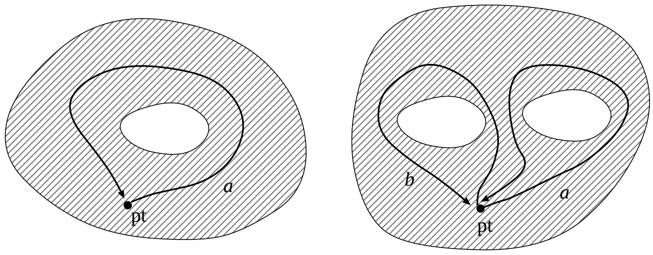
ホモトピーは T から M への連続写像の全体の集合に同値関係を定める.
この同値関係で類別したときの同値類を写像のホモトピー類と呼ぶ.

少し一般化して, 部分集合 $A \subset T$, $B \subset M$ について
$f_j : (T, A) \to (M, B)$, $j = 0, 1$ が $f_j(A) \subset B$ を満たす写像とするときは
ホモトピー F も $\forall T \in I$ に対して常に $F(A, t) \subset B$ となるようなものとする.

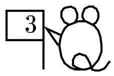
ホモトピー群

特に, 単位 k-方体 I^k からの写像 $(I^k, \partial I^k) \to (M, \mathrm{pt})$ の
ホモトピー類は自然に群構造を持つ
これを M の k 次ホモトピー群と呼び, $\pi_k(M, \mathrm{pt})$ あるいは $\pi_k(M)$ で表す.
(基点 pt の取り替えは群を同型に写すだけなので, 普通は略す.)

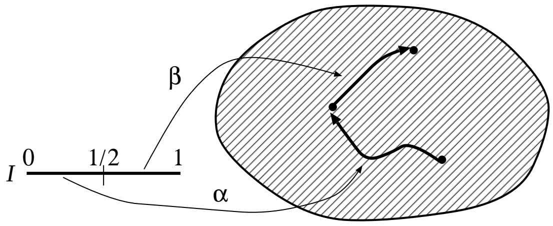
$k = 1$ のとき $(I, \partial I) \to (M, \mathrm{pt})$ は
pt から出て pt に戻る M 内の閉曲線のホモトピー類
例 : ☆ 穴が無い平面領域 M では $\pi_1(M) = \{e\}$.
　☆ 穴が一つの平面領域 M では $\pi_1(M) \cong Z$.
　☆ 穴が二つの平面領域 M では $\pi_1(M) \cong Z * Z$
　　$*$ は自由積 (free product) : 二つの独立非可換な元の勝手な順序の積
$a^{m_1} b^{n_1} a^{m_2} b^{n_2} \cdots a^{m_r} b^{n_r}$ の全体



ここで用いた道の積は, 二つの道を繋げる操作だが,
ホモロジーのときと異なり, 繋げる順番も考慮する：



$\alpha(t) : I \to M$, $\beta(t) : I \to M$ を二つの道 (連続写像) とするとき
積 $\gamma(t) = \alpha \circ \beta$ は $\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$ で定義される.

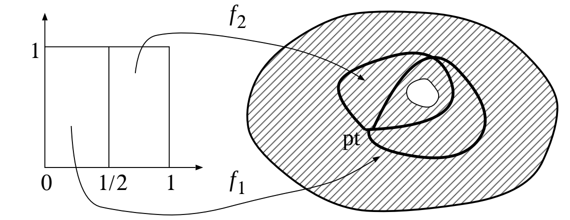


π_1 の計算では始点と終点が一致した道のみを繋げる.
(常に pt に戻って来て繋げる.)

$\pi_1(M)$ のことを M の基本群 (fundamental group) とも呼ぶ.
$\pi_1(M) = \{e\}$ のとき, M は単連結 (simply connected) という.
M が単連結 $\Longleftrightarrow$ すべての閉曲線が M 内の連続変形で一点につぶせる.
平面領域のときは, 単連結 $\Longleftrightarrow$ 穴が開いていない

$k=2$ のとき $(I^2,\partial(I^2))\to(M,\mathrm{pt})$ は
定点 pt を通る球面の像のホモトピー類
球面だと二つを繋ぐ操作が見えにくいが, 正方形なら次のように意味が付く：

$f_1(t_1,t_2):(I^2,\partial I^2)\to(M,\mathrm{pt})$ と $f_2(t_1,t_2):(I^2,\partial I^2)\to(M,\mathrm{pt})$ の積
$f(t_1,t_2):(I^2,\partial I^2)\to(M,\mathrm{pt})$ は
$f(t_1,t_2)=\begin{cases} f_1(2t_1,t_2) & 0\le t_1\le\frac{1}{2}, \\ f_1(2t_1-1,t_2) & \frac{1}{2}\le t_1\le 1\end{cases}$ で与えられる.
(正方形の周はまとめて pt に写される. 繋いだ写像は $t_1=1/2$ も π に写す.)
第一座標でつないでも第二座標でつないでも理論は本質的に不変



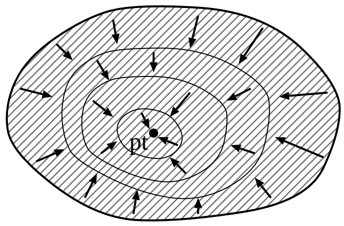
この図をじっと見ると $\pi_2(M,\mathrm{pt})\cong\pi_1(\Omega(M,\mathrm{pt}),\mathrm{pt}^*)$ が分かる.
$\Omega(M,\mathrm{pt})$ は pt を基点とする M 内の閉曲線全体が成す空間 (Loop 空間)
pt^* は pt にずっと留まるような閉曲線 (ループの単位元)
このことから π_k $k\ge 2$ は可換群になることも分かる.
いずれにしても $\pi_k(M)$, $k\ge 2$ は $\pi_1(M)$ ほどは重要でない.

ホモトピー型

二つの位相空間 X, Y がホモトピー同値 (homotopic) とは
$\exists f : X \to Y$, $\exists g : Y \to X$ 連続写像 s.t.
$g \circ f \simeq id_X$, $f \circ g \simeq id_Y$ となること.
これを $X \simeq Y$ と記す.

cf. 位相同型 (同相 homeomorphic) のときは, 最後の条件が
$g \circ f = id_X$, $f \circ g = id_Y$ なので,
ホモトピーの概念はそれよりも弱い.

良く使う特別な例： $X \simeq \mathrm{pt}$ のとき, X は可縮 (contractible) という.
$f : X \to \mathrm{pt}$ は全体を一点に写す写像, $g : \mathrm{pt} \to X$ は点を埋め込む写像



常に $f \circ g = id_{\mathrm{pt}}$ なので,
条件は $h := g \circ f \simeq id_X$
i.e. 空間全体を一点に連続的に潰せること.

可縮な位相空間は構造が自明. 単体はすべて可縮.
三角形分割は, 難しい多様体を構造が自明な基本部品の集まりとみなし,
問題をそれらの繋がり具合に帰着するという意味がある.

$X \cong Y$ (位相同型)

$\Downarrow$

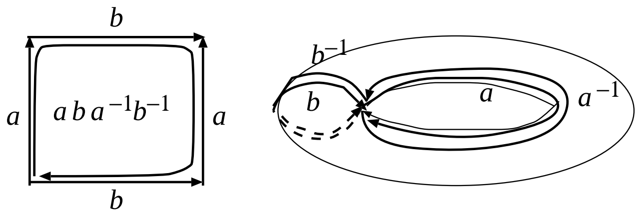
$X \simeq Y$ (ホモトピー同値)

$\Downarrow$ $\searrow$ $\pi_k(X) = \pi_k(Y)$ (ホモトピー群が等しい)

$H_k(X) = H_k(Y)$ (ホモロジー群が等しい)

Poincaré は位相多様体の分類をしようとしたが,
位相同型で分類するのは定義そのままずぎて難しい.
もっと緩い基準でまず粗い分類をしようとして, いろんな概念を導入した.
それぞれ本当に粗くなることは容易に分かる.

例 : 三角形と一点は同相ではないが, ホモトピー同値
　トーラスと穴二つの平面領域は, ホモトピー群は異なるが
　ホモロジー群は同じ $\boldsymbol{Z}^2$
　穴二つの平面領域の方は生成元が全く自由なのに,
　トーラスのホモトピー群は生成元が基本関係式 $aba^{-1}b^{-1} = e$ を満たす



ポアンカレ予想

Poincaré は新たに導入した概念がどのくらいの分類能力を持つかを見るため, いろんな問題を考えた.
その中の一つが,
“ 球面とホモトピー同値な多様体は球面と同相になるか？”
であった.

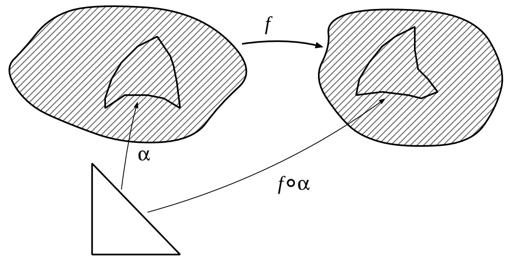
$n = 2$, つまり普通の球面の場合は,
二次元多様体の分類が完成していて
それを見ると正しいことが分かる.
$n = 3$ のときが有名な Poincaré 予想
(現在も未解決).
$n \geq 5$ は Smale により
1961 年に肯定的解決
$n = 4$ は Freedman により
1982 年に肯定的解決

位相幾何は $n = 3, 4$ の
あたりが一番難しい！

ホモトピーとホモロジーの関係

定理　連続写像 $f : X \to Y$ は自然にホモロジー群の準同型写像
$f_* : H_k(X) \to H_k(Y)$ を誘導する.
この対応はファンクトリアルである. i.e.
$f : X \to Y$, $g : Y \to Z \implies (g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_k(X) \to H_k(Z)$.

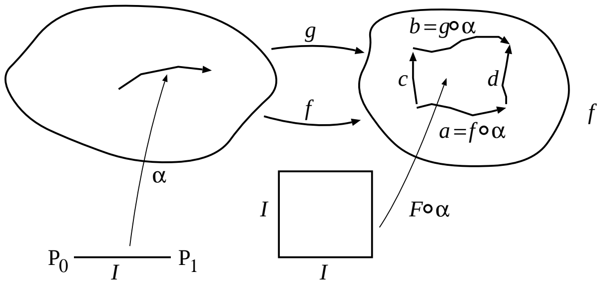
簡単のため特異ホモロジーで説明すると,
例えば X の 2-鎖 α は基準三角形から X への連続写像
それを $f : X \to Y$ と合成すれば, Y の 2-鎖 $f \circ \alpha$ ができる.
この対応は明らかに境界作用素 ∂ と両立する：　$\partial(f \circ \alpha) = f \circ \partial\alpha$
よって f は $Z_k(X)$ を $Z_k(Y)$ に, $B_k(X)$ を $B_k(Y)$ に写し,
従って商加群の間の写像
$f_* : H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X) \to H_k(Y) = Z_k(Y)/B_k(Y)$ が確定する.



三角形分割によるホモロジー群の場合は, f が必ずしも
X の三角形分割を Y の三角形分割に対応させているとは限らないので,
X の三角形の f による像を Y の三角形のいくつかの集合で近似する
という操作を導入しなければならないが, 議論の本質は同じ.

定理　$f: X \to Y$ と $g: X \to Y$ がホモトピー同値なら,
　上の定理でこれらが誘導するホモロジー群の写像は一致する：
　$f_* = g_* : H_k(X) \to H_k(Y)$

これも簡単のため特異ホモロジーで説明する
$F(x,t)$ を f, g の間のホモトピーとすると,
例えば X の 1-鎖 α から, Y の 2-鎖 $F(\alpha(t_1),t_2) : I \times I \to Y$ が生じる.
これから $h: C_k(X) \to C_{k+1}(Y)$ という写像が誘導される.



$\partial h - h\partial = f{\circ}\alpha - g{\circ}\alpha$ が成り立つ.
$\because$　$f{\circ}\alpha = \boldsymbol{a}$, $g{\circ}\alpha = \boldsymbol{b}$, $\partial I := \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0$, $F(\mathrm{P}_0, I) = \boldsymbol{c}$, $F(\mathrm{P}_1, I) = \boldsymbol{d}$ と置けば,
　図から明らかなように,
　$\partial h(I) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{d} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$,　$h\partial I = F(\mathrm{P}_1, I) - F(\mathrm{P}_0, I) = \boldsymbol{d} - \boldsymbol{c}$
　$\therefore$　$\partial h(I) - h\partial(I) = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = f(\alpha(I)) - g(\alpha(I))$

抽象ホモロジー代数の続き

一般に, 鎖複体の間の準同型写像の可換図式

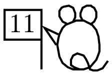
$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{F_2} & A_1 & \xrightarrow{F_1} & A_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \varphi_2 \downarrow & & \varphi_1 \downarrow & & \varphi_0 \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B_2 & \xrightarrow{G_2} & B_1 & \xrightarrow{G_1} & B_0 & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

があれば, ホモロジー群の間の準同型写像 $\varphi_* : H_k(A.) \to H_k(B.)$
が誘導される.

更に, 鎖複体の間の次数を一つ上げる準同型写像で

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A_2 & \xrightarrow{F_2} & A_1 & \xrightarrow{F_1} & A_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & h_2 \swarrow & \varphi_2 \downarrow & h_1 \swarrow & \varphi_1 \downarrow & h_0 \swarrow & \varphi_0 \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B_2 & \xrightarrow{G_2} & B_1 & \xrightarrow{G_1} & B_0 & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

$G_{k+1}h_k - h_{k-1}F_k = \varphi_k$ を満たすものがあれば, $\varphi_* = 0$ となる.
実際, 任意の輪体 α の φ_k による像は
$\varphi_k(\alpha) = G_{k+1}h_k(\alpha) - h_{k-1}F_k(\alpha) = G_{k+1}h_k(\alpha)$ は境界となるから, ~ 0.



先に出て来たホモトピーから誘導された h は
$\partial h - h\partial = f - g$ で鎖ホモトピーの条件を満たすから
$f - g \sim 0$ i.e. $f \sim g$ すなわち $f_* = g_*$

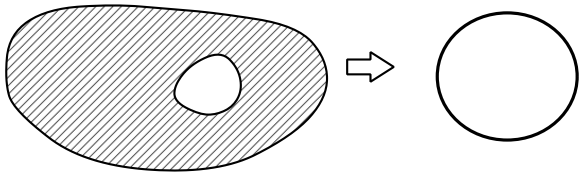
定理 X と Y がホモトピー同値なら, $H_k(X) \cong H_k(Y)$
すなわち, ホモトピーが一致すればホモロジーも一致する

実際, $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ を $g \circ f \simeq id_X$, $f \circ g \simeq id_Y$ なる
連続写像とすれば, 前定理より
$g_* f_* = id : H_k(X) \to H_k(X)$, $f_* g_* = id : H_k(Y) \to H_k(Y)$
よって f_*, g_* は $H_k(X)$ と $H_k(Y)$ の間の同型を与える写像となる.

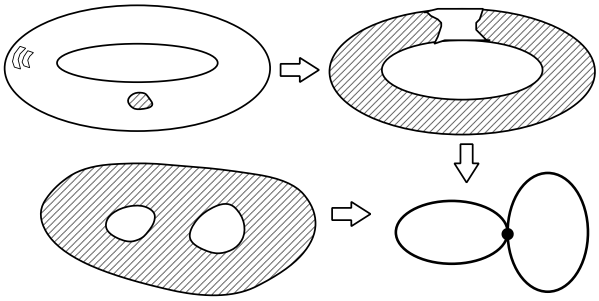
* * * * * * *

ホモトピー同値な空間のホモトピー群が等しいことは定義からすぐわかる：
1. 連続写像 $f : X \to Y$ が有れば, ホモトピー群の写像
$f_* : \pi_k(X) \to \pi_k(Y)$ が自然に誘導される.
2. 連続写像 $f, g : X \to Y$ がホモトピー同値なら, それらから誘導される
ホモトピー群の間の写像 f_*, g_* は一致する.
3. $X \simeq Y$ なら, $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ を
$g \circ f \simeq id_X$, $f \circ g \simeq id_Y$ を満たす連続写像とするとき,
$g_* \circ f_* = id_{X*}$, $f_* \circ g_* = id_{Y*}$

例 1: 平面の一つ穴領域は円周とホモトピー同値,
従って基本群も H_1 も $\cong \boldsymbol{Z}$



例 2: トーラスから円板を切り取ったものは
円周を二個くっつけたもの (bouquet) とホモトピー同値,
従って基本群は二つ穴の平面領域と同じく $\cong \boldsymbol{Z} * \boldsymbol{Z}$



$k \geq 2$ については関係は複雑だが, $k = 1$ すなわち基本群については, 簡明：
$H_1(X)$ は $\pi_1(X)$ のアーベル化である.
i.e. $H_1(X) \cong \pi_1(X)/[\pi_1(X), \pi_1(X)]$

ここで一般に, 群 G に対し $[G, G] := \{ghg^{-1}h^{-1} \mid g, h \in G\}$ は
G の交換子群 (commutator subgroup) を表す.
$[G, G]$ G であり, $G/[G, G]$ は G の可換部分を取り出す操作に相当する：
$ghg^{-1}h^{-1} \sim e \iff gh = hg$

$$\because \quad \begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \longrightarrow & H_1(X) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [\alpha] & \mapsto & [\alpha] \end{array}$$ という自然な写像が定義できる.

$\alpha \simeq \beta$ なら, このホモトピーを与える写像 F は X の特異 2-鎖 $\varGamma$ を誘導し,
$\partial \varGamma = \alpha - \beta$
また明らかに $[\alpha \circ \beta] \mapsto [\alpha] + [\beta]$ よって $[\pi_1(X), \pi_1(X)] \to 0$.
逆に, ホモロジーとホモトピーは同じ生成元の集合を持つので,
$H_1(X)$ に写ると 0 になるものは, 積の順序を並べ替えると e に帰着する
ような語で定義される $\pi_1(X)$ の元に限られる.
そのようなものは交換子の積で書ける.

一般に, 群 G の一つの語において生成元の積の順序を交換したものは,
交換子群を法として元の元と等しい：

$$\begin{aligned} \cdots cba &= \cdots cab \cdot \underline{b^{-1}a^{-1}ba} \\ &= \cdots acb \cdot \underline{(cb)^{-1}a^{-1}(cb)a} \end{aligned}$$

(下線部が交換子群に属する)