

## 幾何入門 第7回



情報科学科 金子 晃

Алексей КАМЕНКО

[kanenko@is.ocha.ac.jp](mailto:kanenko@is.ocha.ac.jp)

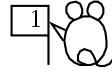
この講義のホームページ:

<http://atom.is.ocha.ac.jp/~kanenko/KOUGI/Geo>

この講義のホームディレクトリ:

[edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo](http://edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo)

# 微分形式の外微分



$k$  次の微分形式  $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  から

$k+1$  次の微分形式を作る操作:

$$d\omega := \sum_{i_1, \dots, i_k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{i_1, \dots, i_k}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

例 0 0 次微分形式は函数のことと規約する.  $\omega = f(x)$  の外微分は

$$df(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x^j} dx^j$$

例 1 1 次微分形式  $\omega = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx^i$  の外微分は

$$d\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_i(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial a_j(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i(x)}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j$$

特に, 2 変数のときは, 座標を  $(x, y)$  で表すとき,

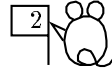
$\omega = f(x, y) dx + g(x, y) dy$  に対し

$$\begin{aligned} d(f dx + g dy) &= \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

例 2 2 次微分形式  $\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$  の外微分は

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \left( \frac{\partial a_{jk}(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{ik}(x)}{\partial x^j} + \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x^k} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \end{aligned}$$

## 外微分に対する Leibniz の公式



$\omega$  を  $p$  次,  $\theta$  を  $q$  次の微分形式とするとき

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta$$

$$\because \omega = \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, \quad \theta = \sum_{j_1, \dots, j_q} b_{j_1 \dots j_q}(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$$

とすれば

$$\begin{aligned} \omega \wedge \theta &= \left( \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \right) \wedge \left( \sum_{j_1, \dots, j_q} b_{j_1 \dots j_q}(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} a_{i_1 \dots i_p}(x) b_{j_1 \dots j_q}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q} \end{aligned}$$

$\therefore \omega \wedge \theta$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}(x) b_{j_1 \dots j_q}(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}(x)}{\partial x^k} b_{j_1 \dots j_q}(x) dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$$

$$+ \sum_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} \sum_{k=1}^n a_{i_1 \dots i_p}(x) \frac{\partial b_{j_1 \dots j_q}(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$$

$$= \sum_{i_1, \dots, i_p} \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_{i_1 \dots i_p}(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

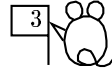
$$\wedge \sum_{j_1, \dots, j_q} b_{j_1 \dots j_q}(x) dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$$

$$+ (-1)^p \sum_{i_1, \dots, i_p} a_{i_1 \dots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

$$\wedge \sum_{j_1, \dots, j_q} \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{j_1 \dots j_q}(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}$$

$$= d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta$$

$$d^2 = 0$$



実際,  $k$  次の微分形式  $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1 \dots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  に対し

$$d\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x^l} \left( \frac{\partial a_{i_1 \dots i_k}(x)}{\partial x^j} \right) dx^l \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_k}(x)}{\partial x^l \partial x^j} dx^l \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \end{aligned}$$

ここで, 偏微分の順序交換ができることから,  $\frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_k}(x)}{\partial x^l \partial x^j} = \frac{\partial^2 a_{i_1 \dots i_k}(x)}{\partial x^j \partial x^l}$

i.e.  $dx^j \wedge dx^l$  の係数と  $dx^l \wedge dx^j$  の係数は等しいから, 同類項をまとめたときに, これらは反対称性により打ち消す.

実は,  $d^2 = 0$  と  $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge (-1)^p \theta$  と  $df(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k$  とから

微分形式の外微分の最初の定義に自然に到達する:

$$\begin{aligned} d\left(f(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}\right) &= d(f(x)) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} + f(x) d(dx^{i_1}) \wedge \dots \wedge dx^{i_p} - + \dots \\ &\quad + (-1)^{p-1} f(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge d(dx^{i_p}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \end{aligned}$$

第2項以下は  $d^2 = 0$  より消える.

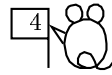
より一般の微分形式に対しては  $d$  を線型に拡張する.

☞  $f(x)$  は函数ではないので, この計算の過程は座標依存である.

純粋数学としての幾何学では, 座標に依存した定義を嫌うため,

函数に対する  $df(x)$  の定義と  $d^2 = 0$  と  $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + \omega \wedge (-1)^p d\theta$  を元に, 局所座標を使わないで (intrinsic に) 外微分の定義をする.

# 共変と反変



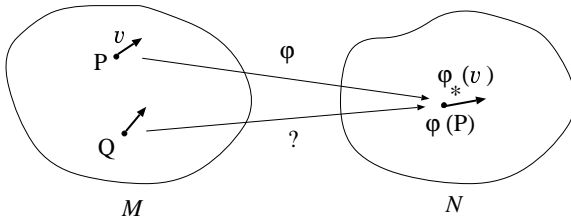
外微分の結果は座標に依存しない. これを少し組織的に見る.

問: 二つの可微分多様体間の可微分写像  $\varphi: M \rightarrow N$  があったとき, 自然に引越しができるのは  $M$  上のベクトル場?  $N$  上のベクトル場?  $M$  上の微分形式?  $N$  上の微分形式? どれが正しい?

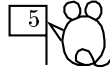
答: 反変ベクトルは  $M$  から  $N$  に自然に引っ越しする (共变的!)

$\varphi$  の局所座標表示を  $y = \varphi(x)$  とし,  
 $M$  の点  $P$  における接ベクトルの局所座標表示を  $\vec{v} = \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  とすれば,  
 $N$  の点  $Q = \varphi(P)$  の接ベクトルが局所座標表示で  
 $\vec{w} = \varphi_* \vec{v} := \sum_{i=1}^n a^i \frac{\partial y_j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j}$  で定まる.

しかし, ベクトル場になると, うまくゆかない:  
係数  $a^i(x)$  に  $x = \varphi^{-1}(y)$  を代入しなければならないが,  
逆写像は一般には値が一意でない.



これに対し、 $N$  上の微分形式は  $M$  に引っ越せる (反変的!)



$N$  上の微分形式の局所座標表示を

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(y) dy^{i_1} \wedge \dots \wedge dy^{i_k} \text{ とすれば,}$$

$M$  上の微分形式が

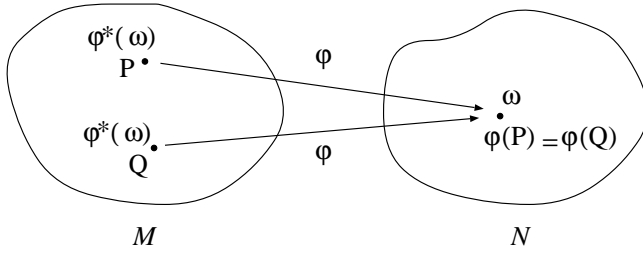
$$\eta = \varphi^* \omega := \sum_{j_1, \dots, j_k} b_{j_1, \dots, j_k} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k},$$

$$\text{ここに } b_{j_1, \dots, j_k}(y) = \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1, \dots, i_k}(\varphi(x)) \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{j_k}}$$

これは自然に代入して微分計算したもの.

$\omega$  の  $\varphi$  による引き戻し (pull back) と呼ぶ.

(既に微分形式の積分の定義で使ってしまった!)



## 引き戻しと外積に関する微分形式の公式 6

☆ 外積は引き戻しと可換： $\varphi^*(\omega \wedge \theta) = \varphi^*\omega \wedge \varphi^*\theta$

∴ 座標を入れて定義を当てはめれば明らか

☆ 外微分は引き戻し写像と可換： $d\varphi^*\omega = \varphi^*d\omega$

∴ まず、函数  $f(y)$  について  $d(\varphi^*f) = \varphi^*df$ , すなわち、

$$d(f(\varphi(x))) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial x^i} dx^i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y^j}(\varphi(x)) \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i$$

と  $\varphi^* \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y^j}(y) dy^j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y^j}(\varphi(x)) \frac{\partial y^j}{\partial x^i} dx^i$  は確かに等しい.

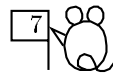
次に一次の微分形式について、 $N$  上の局所座標表示

$\omega = a(y) dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p}$  に対し、 $\varphi^*$  と  $\wedge$  が可換なことから

$$\begin{aligned} \varphi^*d\omega &= \varphi^*\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial a}{\partial y^k} dy^k \wedge dy^{i_1} \wedge \cdots \wedge dy^{i_p}\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial a}{\partial y^k}(\varphi(x)) \varphi^*(dy^k) \wedge \varphi^*(dy^{i_1}) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(dy^{i_p}) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial a}{\partial y^k}(\varphi(x)) d\varphi^k(x) \wedge d\varphi^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge d\varphi^{i_p}(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \frac{\partial a}{\partial y^k}(\varphi(x)) \frac{\partial \varphi^k(x)}{\partial x^l} dx^l \wedge d\varphi^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge d\varphi^{i_p}(x) \\ &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial a(\varphi(x))}{\partial x^l} dx^l \wedge d\varphi^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge d\varphi^{i_p}(x) \\ &= d\left(a(\varphi(x)) d\varphi^{i_1}(x) \wedge \cdots \wedge d\varphi^{i_p}(x)\right) \\ &= d\varphi^*\omega \end{aligned}$$

特に、外微分作用素は座標によらない意味を持つ.

## de Rham コホモロジー



$d^2 = 0$  より, 多様体  $M$  上の  $k$  次微分形式の空間  $\Omega^k(M)$  の列は  
外微分作用素を複体の微分として鎖複体を成す:

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \rightarrow \cdots \rightarrow \Omega^n(M) \rightarrow 0$$

よって, この鎖複体のホモロジー群が定義できるが, 複体の微分写像  $d$  が  
次数の下る方向に働くので, ホモロジーでなくコホモロジーと呼ぶ.

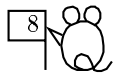
$$\begin{aligned} Z^k(\Omega^*(M)) &= \text{Ker} \{d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)\} \quad (\text{閉微分形式}), \\ B^k(\Omega^*(M)) &= \text{Image} \{d : \Omega^{k-1}(M) \rightarrow \Omega^k(M)\} \quad (\text{完全微分形式}) \\ &= d\Omega^{k-1}(M) \end{aligned}$$

このとき,  $M$  の  $k$  次 de Rham コホモロジー群が  
 $H^k(\Omega^*(M)) := Z^k(\Omega^*(M))/B^k(\Omega^*(M))$  で定義される.

例:  $H^1(\Omega^*(M))$  の意味. 簡単のため平面で考える.

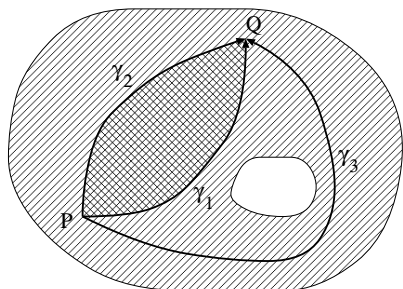
1 次の微分形式  $\omega = f(x, y)dx + g(x, y)dy$  がいつ  $\omega = dF(x, y)$  と書けるか  
という問題である.



必要条件は  $0 = d^2 F(x, y) = d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$  より, 

$\omega \in Z^1(\Omega(M))$  (i.e. 閉形式).

逆に閉形式なら  $F(Q) := \int_P^Q \omega$  は局所的には P と Q を結ぶ道によらずに定まる.



$$\int_{\gamma_1 - \gamma_2} f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

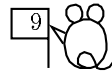
$$= \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx dy = 0$$

(平面における Green の定理)

しかし, 領域に穴があると, 領域内で膜が張れないくらい遠くの道とは積分値が食い違ってしまい,  $F(P)$  は多価になる.

de Rham コホモロジー群はこの差を表す. ホモロジー群と大いに関係有り?

## 双対性と種々の積分公式



Green の定理, Stokes の定理, Gauss の発散定理 などは  
微積の最後に学ぶ重要な公式である (advanced calculus という)  
これらは微分形式で統一的に説明できる.

微分形式の外微分作用素  $d$  は, 鎖の境界作用素  $\partial$  と互いに双対!

これは一般化された Stokes の定理として知られた次の主張による:  
 $\omega$  を  $k-1$  次微分形式,  $D$  を  $k$  次鎖とすると

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega \quad \text{i.e.} \quad \langle D, d\omega \rangle = \langle \partial D, \omega \rangle \quad (1)$$

cf. 有限次元線型空間の双対空間のペアに対し,  $\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A'\vec{y} \rangle$  で,  
双対作用素が定義される.  $A$  が行列なら  $A'$  は  $A$  の転置行列に相当する.

例 1 :  $k=1$  のとき,  $0$  次微分形式は函数のこと :  $\omega = f(P)$

一次鎖を  $\alpha$  とすれば,  $\partial\alpha = P_1 - P_0$

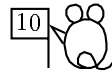
ここに  $P_0, P_1$  はそれぞれ  $\alpha$  の始点, 終点

よって上の公式は

$$\int_{\alpha} df(P) = \int_{P_1 - P_0} f(P) = f(P_1) - f(P_0)$$

と読める. 当り前の式!

例 2 :  $k = 2$  のとき,



1 次の微分形式は, 局所座標で  $\sum_{j=1}^n f_j(x) dx_j$

2 次の鎖  $D$  は  $\mathbf{R}^2$  の標準三角形  $\{(t_1, t_2) \mid t_1 \geq 0, t_2 \geq 0, t_1 + t_2 \leq 1\}$  から  $M$  への写像.

これも局所座標で  $x = \varphi(t_1, t_2)$  と書くと,  
引き戻しと外微分の可換性により,

$$\int_D d\omega = \int_{\Delta} d\varphi^*\omega, \quad \int_{\partial D} \omega = \int_{\partial \Delta} \varphi^*\omega$$

よって最初から  $\mathbf{R}^2$  上の 1 次微分形式  $\varphi^*\omega = f(t_1, t_2)dt_1 + g(t_1, t_2)dt_2$  と  $\mathbf{R}^2$  の標準三角形  $\Delta = \Delta P_0 P_1 P_2$  について Stokes の公式を確かめれば十分.

$$\partial \Delta P_0 P_1 P_2 = \overrightarrow{P_0 P_1} + \overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 P_0},$$

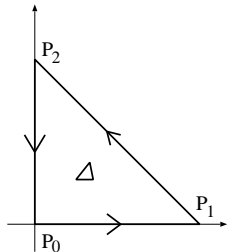
$$d\{f(t_1, t_2)dt_1 + g(t_1, t_2)dt_2\} = \left( \frac{\partial g}{\partial t_1} - \frac{\partial f}{\partial t_2} \right) dt_1 \wedge dt_2$$

だから, 証明すべき式は

$$\int_{\overrightarrow{P_0 P_1} + \overrightarrow{P_1 P_2} + \overrightarrow{P_2 P_0}} \{f(t_1, t_2)dt_1 + g(t_1, t_2)dt_2\} = \iint_{\Delta P_0 P_1 P_2} \left( \frac{\partial g}{\partial t_1} - \frac{\partial f}{\partial t_2} \right) dt_1 dt_2$$

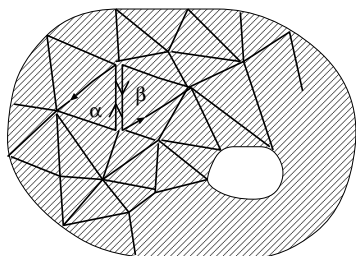
$$\begin{aligned}
\text{この右辺は} &= \iint_{\Delta P_0 P_1 P_2} \frac{\partial g}{\partial t_1} dt_1 dt_2 - \iint_{\Delta P_0 P_1 P_2} \frac{\partial f}{\partial t_2} dt_2 dt_1 \quad \boxed{11} \\
&= \int_{\vec{P_1 P_2}} g dt_2 - \int_{\vec{P_0 P_2}} g dt_2 - \left( \int_{\vec{P_2 P_1}} f dt_1 - \int_{\vec{P_0 P_1}} f dt_1 \right) \\
&= \int_{\vec{P_1 P_2}} g dt_2 + \int_{\vec{P_2 P_0}} g dt_2 + \int_{\vec{P_1 P_2}} f dt_1 + \int_{\vec{P_0 P_1}} f dt_1
\end{aligned}$$

と変形され、 $P_0 P_1$  上では  $dt_2 = 0$ ,  $P_2 P_0$  上では  $dt_1 = 0$  であることに注意すれば、これから左辺を得る。



一般の二次元領域の上の Green の定理は、領域を標準三角形の像で分割すれば、上の場合の和として証明できる。

分割により領域内に生じた仮想境界線では、その両側の面から生ずる線積分が逆向きとなり、和を取ると打ち消し合って最終的には残らない。



例 3  $\mathbf{R}^3$  内の有界領域  $D$  に対する Gauss の発散定理

2 次微分形式を

$\omega = f(x, y, z)dy \wedge dz + g(x, y, z)dz \wedge dx + h(x, y, z)dx \wedge dy$  とすると,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial h}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy$$

$$= \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

よって, 一般化 Stokes 定理 (1) の左辺はこの場合,

$$\iiint_D \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \right) dx dy dz$$

となる. また右辺の境界積分

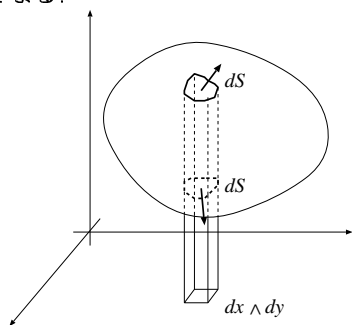
$$\iint_{\partial D} f(x, y, z)dy \wedge dz + g(x, y, z)dz \wedge dx + h(x, y, z)dx \wedge dy$$

は  $\partial D$  の外向き単位法線ベクトル  $\vec{\nu} = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$  を用いると,

$dy \wedge dz = \nu_x dS$ ,  $dz \wedge dx = \nu_y dS$ ,  $dx \wedge dy = \nu_z dS$  等と普通の面積分要素に翻訳され, 全体として

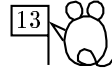
$$\iint_{\partial D} \{f(x, y, z)\nu_x + g(x, y, z)\nu_y + h(x, y, z)\nu_z\} dS$$

となる.



$\mathcal{Q}$   $(f, g, h)$  は接ベクトル場ではないので, 通常が発散定理とはカテゴリー的にまだ微妙なギャップが有る.  $\mathbf{R}^3$  の中で座標を固定していれば, 差は無視してよい.

例 4  $\mathbf{R}^3$  内の曲面片に対する Stokes の定理



$\mathbf{R}^3$  内の曲面片を  $D$ , 1 次微分形式を  $\omega = f dx + g dy + h dz$

とすると,

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) dz \wedge dx$$

これは, Gauss の発散定理と同様, 普通の面積要素で

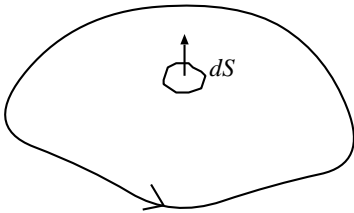
$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) \nu_z dS + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right) \nu_x dS + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right) \nu_y dS$$

と書き直され,  $\text{rot}$  の記号を使うと  $\text{rot}(f, g, h) \cdot \vec{\nu}$  となる.

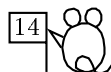
よって, 一般化 Stokes 定理はこの場合

$$\iint_D \text{rot}(f, g, h) \cdot \vec{\nu} dS = \int_{\partial D} f dx + g dy + h dz$$

となる.



## レポート問題



- 問題 7 1)  $\mathbf{R}^3$  内の上半球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0$  の表面上で  
微分形式  $x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy$  を積分せよ。  
ただし表面の向きは外向き法線の向きに取るものとする。  
2) Stokes の定理により上の面積分を半球体上の体積積分に直せ。

- 問題 8 円周  $S^1$  および flat torus の de Rham コホモロジー群を  
直接計算してみよ。ただし, flat torus とは  $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$  のことである。

[ヒント: 円周の場合は  $a(\theta)$  が  $2\pi$ -周期函数のとき

$a(\theta)d\theta = dF(\theta)$  が  $2\pi$ -周期函数の解  $F(\theta)$  を持つのはいつかを調べる.]