

# 幾何入門 第10回



情報科学科 金子 晃

Алексей КАМЕНКО

[kanenko@is.ocha.ac.jp](mailto:kanenko@is.ocha.ac.jp)

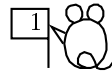
この講義のホームページ:

<http://atom.is.ocha.ac.jp/~kanenko/KOUGI/Geo>

この講義のホームディレクトリ:

[edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo](http://edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo)

## 曲面の基本形式の復習



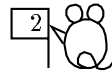
曲面のパラメータ  $u, v$  が  $du, dv$  だけ動いたときの  
曲面上の動き (無限小接ベクトル)  $d\vec{r}$  の長さの平方が  
曲面の第一基本形式と呼ぶのであった :

$$I := |d\vec{r}|^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

曲面上で  $d\vec{r}$  だけ動いたときの曲面の単位法線  $\vec{e}_3$  の変化の  
接平面成分を曲面の第二基本形式と呼ぶのであった :

$$II := -d\vec{e}_3 \cdot d\vec{r} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

## 主曲率



以上より、二つの二次形式  $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ ,

$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$  が得られた。

$I$  は正定値だが、 $II$  は正定値と限らない。

束縛条件  $I = 1$  の下での  $II$  の極値  $\kappa_1, \kappa_2$  を曲面のこの点での主曲率と呼ぶ。

線型代数の復習：

$I = \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$  は正値対称な二次形式だから、

直交行列  $P$  で対角化でき、平方根をとることができる：

${}^t P \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =: \Lambda, \quad \sqrt{\Lambda} := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$  と置けば

$\therefore {}^t(P\sqrt{\Lambda}^{-1}) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} P\sqrt{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

よって  $\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = P\sqrt{\Lambda}^{-1} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$  と変換すれば、 $I = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$ 。

よって、束縛条件  $(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 = 1$  の下での

$II = (\theta^1, \theta^2) \underbrace{{}^t(P\sqrt{\Lambda}^{-1}) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} (P\sqrt{\Lambda}^{-1})}_{=: B} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$

の最大、最小を求めることに帰着し、それは、この新しい係数行列  $B$  である対称行列の最大固有値、最小固有値で与えられる。

これは束縛条件無しの場合、 $\frac{II}{I} = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$  の最大・最小問題と同値。従って、先に注意したように法曲率の最大・最小値と一致する。

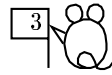
また最大最小は、行列  $B$  の固有ベクトルに対応するベクトル  $(\theta^1, \theta^2)$  で実現される。

対称行列の固有ベクトルは互いに直交し、 $(\theta^1, \theta^2)$  自身が

正規直交標構  $[\vec{e}_1, \vec{e}_2]$  に対する座標成分なので、

最大最小をとる方向は接平面内で互いに直交することも分かる。

## 曲面論の基本定理



$\kappa_1 \kappa_2$  を Gauss 曲率,  $\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$  を平均曲率と呼ぶ.

ともに曲面の性質を表す重要な量である.

しかし, 曲面の自由度は曲線に比べて大きいので, この二つの函数だけでは曲面の合同類は決まらない.

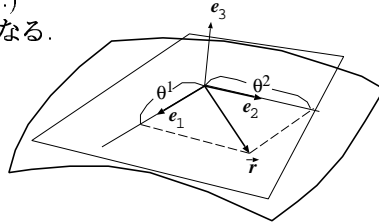
曲面論の基本定理は, “二つの二次対称微分形式が与えられたとき, それがある基本関係式を満たせば, それらを第一, 第二基本形式とする曲面が合同を除いてただ一つ定まる” という形をしている.

以下, 基本関係式を説明するため, 記号を導入する.

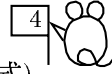
先に定めた  $\theta^1, \theta^2$  に対して, 接平面の正規直交基底  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  を  $d\vec{r} = \theta^1 \vec{e}_1 + \theta^2 \vec{e}_2$ , かつ  $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$  となるような向きを選ぶ.

(ピタゴラスの定理により一意に定まる.)

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  はこの点での標構 (frame) となる.



ここで



$$d\vec{e}_i = \omega_i^1 \vec{e}_1 + \omega_i^2 \vec{e}_2 + \omega_i^3 \vec{e}_3 \quad (\omega_i^j \text{ は } du, dv \text{ のある一次微分形式})$$

と置くと,  $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$  より

$$d\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot d\vec{e}_j = 0 \quad \therefore \omega_i^j = -\omega_j^i. \quad \text{特に } \omega_i^i = 0.$$

よって  $d^2\vec{r} = 0$  から

$$\begin{aligned} 0 = d^2\vec{r} &= d(\theta^1 \vec{e}_1 + \theta^2 \vec{e}_2) = d\theta^1 \vec{e}_1 - \theta^1 \wedge d\vec{e}_1 + d\theta^2 \vec{e}_2 - \theta^2 \wedge d\vec{e}_2 \\ &= d\theta^1 \vec{e}_1 - \theta^1 \wedge (\omega_1^2 \vec{e}_2 + \omega_1^3 \vec{e}_3) + d\theta^2 \vec{e}_2 - \theta^2 \wedge (\omega_2^1 \vec{e}_1 + \omega_2^3 \vec{e}_3) \\ &= (d\theta^1 - \theta^2 \wedge \omega_2^1) \vec{e}_1 + (d\theta^2 - \theta^1 \wedge \omega_1^2) \vec{e}_2 - (\theta^1 \wedge \omega_1^3 + \theta^2 \wedge \omega_2^3) \vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$\therefore d\theta^1 = \theta^2 \wedge \omega_2^1, \quad d\theta^2 = \theta^1 \wedge \omega_1^2 \quad (\text{曲面の第一構造方程式})$$

また  $\theta^1 \wedge \omega_1^3 + \theta^2 \wedge \omega_2^3 = 0$  も分かる.

$$\text{他方, } \Pi = -d\vec{e}_3 \cdot d\vec{r} = -(\omega_3^1 \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2) \cdot (\theta^1 \vec{e}_1 + \theta^2 \vec{e}_2) = \omega_3^1 \theta^1 + \omega_3^2 \theta^2$$

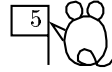
よって  $\omega_3^1 = b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2$ ,  $\omega_3^2 = b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2$  と置くと,  
 $\theta^1 \wedge \omega_1^3 + \theta^2 \wedge \omega_2^3 = 0$  より

$$\begin{aligned} 0 &= \theta^1 \wedge (b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2) + \theta^2 \wedge (b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2) \\ &= (b_{12} - b_{21})\theta^1 \wedge \theta^2 \quad \therefore b_{12} = b_{21} \end{aligned}$$

$$\text{よって } \Pi = b_{11}(\theta^1)^2 + 2b_{12}\theta^1\theta^2 + b_{22}(\theta^2)^2 = \begin{pmatrix} \theta^1 & \theta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$$

故に, 主曲率はこの行列の固有値で fg ある.

次に,  $d^2\vec{e}_2 = 0$  より,



$$\begin{aligned} 0 &= d(\omega_2^1\vec{e}_1 + \omega_3^2\vec{e}_3) = d\omega_2^1\vec{e}_1 - \omega_2^1 \wedge d\vec{e}_1 + d\omega_3^2\vec{e}_3 - \omega_3^2 \wedge d\vec{e}_3 \\ &= d\omega_2^1\vec{e}_1 - \omega_2^1 \wedge (\omega_1^2\vec{e}_2 + \omega_1^3\vec{e}_3) + d\omega_3^2\vec{e}_3 - \omega_3^2 \wedge (\omega_3^1\vec{e}_1 + \omega_3^2\vec{e}_2) \\ &= (d\omega_2^1 - \omega_2^3 \wedge \omega_3^1)\vec{e}_1 + (\omega_2^1 \wedge \omega_1^2 + \omega_2^3 \wedge \omega_3^2)\vec{e}_2 + (d\omega_3^2 - \omega_2^1 \wedge \omega_3^1)\vec{e}_3 \\ \therefore d\omega_2^1 &= \omega_2^3 \wedge \omega_3^1 = \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 = (b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2) \wedge (b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2) \\ &= (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\theta^1 \wedge \theta^2 \end{aligned}$$

$$\therefore d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2, \quad K = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} \quad (\text{曲面の第二構造方程式})$$

また  $d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3$  同様に  $d^2\vec{e}_1 = 0$  を計算して  $d\omega_1^3 = \omega_1^2 \wedge \omega_2^3$

最後の二式から  $b_{ij}$  が満たすべき微分方程式を求める. 最後の式より

$$d(b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2) = \omega_1^2 \wedge (b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2)$$

ここで左辺は第一構造方程式を用いて

$$\begin{aligned} &= db_{11} \wedge \theta^1 + b_{11}d\theta^1 + db_{12} \wedge \theta^2 + b_{12}d\theta^2 \\ &= db_{11} \wedge \theta^1 + b_{11}\theta^2 \wedge \omega_2^1 + db_{12} \wedge \theta^2 + b_{12}\theta^1 \wedge \omega_1^2 \end{aligned}$$

と変形できるから, これから右辺を引いて共通因子をまとめれば

$$(db_{11} - b_{12}\omega_1^2 - b_{21}\omega_1^2) \wedge \theta^1 + (db_{12} - b_{11}\omega_2^1 - b_{22}\omega_1^2) \wedge \theta^2 = 0$$

同様にもう一つの式から

$$\begin{aligned} d(b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2) &= \omega_2^1 \wedge (b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2) \\ &= db_{21} \wedge \theta^1 + b_{21}d\theta^1 + db_{22} \wedge \theta^2 + b_{22}d\theta^2 \\ &= db_{21} \wedge \theta^1 + b_{21}\theta^2 \wedge \omega_2^1 + db_{22} \wedge \theta^2 + b_{22}\theta^1 \wedge \omega_1^2 \end{aligned}$$

$$\therefore (db_{21} - b_{22}\omega_1^2 - b_{11}\omega_2^1) \wedge \theta^1 + (db_{22} - b_{21}\omega_2^1 - b_{12}\omega_2^1) \wedge \theta^2 = 0$$

よって今

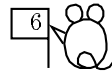
$$\begin{aligned} db_{11} - b_{12}\omega_1^2 - b_{21}\omega_1^2 &= b_{11,1}\theta^1 + b_{11,2}\theta^2, \\ db_{12} - b_{11}\omega_2^1 - b_{22}\omega_1^2 &= b_{12,1}\theta^1 + b_{12,2}\theta^2, \\ db_{21} - b_{22}\omega_1^2 - b_{11}\omega_2^1 &= b_{21,1}\theta^1 + b_{21,2}\theta^2, \\ db_{22} - b_{21}\omega_2^1 - b_{12}\omega_2^1 &= b_{22,1}\theta^1 + b_{22,2}\theta^2 \end{aligned}$$

と置くと, これらの係数は, 上に代入して次を満たすことが分かる:

$$b_{11,2} = b_{12,1}, \quad b_{21,2} = b_{22,1} \quad (\text{Mainardi-Codazzi の方程式})$$

$b_{12} = b_{21}$  だったから,  $db_{12} = db_{21}$ , 従って  $b_{12,1} = b_{21,1}$ ,  $b_{12,2} = b_{21,2}$ .  
よって,  $b_{ij,k}$  は三つの添え字に関して対称である.

## 曲面論の基本定理



二つの二次対称微分形式  $I, II$  が与えら、 $I$  は正定値のとき、  
これらを第一、第二基本形式とする曲面が存在するための必要十分条件は、  
一次微分形式  $\theta^1, \theta^2$  を

$$I = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2, \quad II = \sum_{i,j=1,2} b_{ij} \theta^i \theta^j$$

と表せるようにとったとき、

$$d\theta^i = - \sum_{j=1}^2 \omega_j^i \wedge \theta^j, \quad \omega_j^i = -\omega_i^j, \quad i, j = 1, 2$$

なる条件で一意に定まる一次微分形式  $\omega_i^j$  が

$$d\omega_2^1 = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\theta^1 \wedge \theta^2$$

を満たし、また  $db_{ij}$  の計算から先のように定まる  $b_{ij,k}$  が

$$b_{ij,k} = b_{ik,j}, \quad i, j, k = 1, 2$$

を満たすことである。

このとき、曲面は合同を除いてただ一つに定まる。

証明の粗筋： $\theta^1, \theta^2$  から上のような  $\omega_i^j$  が一意に定まることは  
 $\theta^1, \theta^2$  が曲面上の各点で共変ベクトルの基底を成すので

$$d\theta^1 = a\theta^1 \wedge \theta^2, \quad d\theta^2 = b\theta^1 \wedge \theta^2 \quad \text{と一意に書け、}$$

従って、 $\omega_1^1 = \omega_2^2 = 0, \omega_2^1 = a\theta^1 - b\theta^2 = -\omega_1^2$  であることから分かる。

次に、これらが上の条件を満たすとき、

$$d\vec{r} = \theta^1 \vec{e}_1 + \theta^2 \vec{e}_2, \quad d\vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 \omega_j^i d\vec{e}_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$$

を満たす  $\vec{r}, \vec{e}_i, i = 1, 2, 3$  が求まる。

これは2変数  $u, v$  の連立偏微分方程式となり、

上の条件がその積分可能条件となっているので、次の定理より  
初期条件を適当に定めれば、一意に解ける (帰着の詳細は略)：

Frobenius の定理： $\omega_i, i = 1, \dots, k$  を一次微分形式とする

連立一階全微分方程式 (Pfaff 系)  $\omega_i = 0, i = 1, \dots, k$  が積分可能

i.e.  $\exists F_i(x), i = 1, \dots, k \quad \text{s.t.} \quad \langle \omega_1, \dots, \omega_k \rangle = \langle dF_1, \dots, dF_k \rangle$

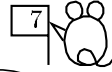
$\iff \exists \omega_i^j, i, j = 1, \dots, k \quad \text{s.t.} \quad d\omega_i = \sum_{j=1}^k \omega_i^j \wedge \omega_j.$

最後の条件を積分可能条件 (integrability condition) と呼ぶ。

☞ 一般に、微分幾何の問題は偏微分方程式を解くことに帰着するものが多く、  
偏微分方程式論の発展の重要な動機の一つとなってきた。

Frobenius の定理もその基本的なものの一つである。

## 例：楕円面

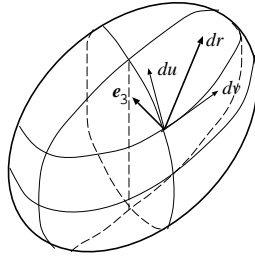


普通の方程式は  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  だが

パラメータ表示

$$\vec{r} = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)$$

を使って計算する.



$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (-a \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, c \cos u) du \\ &\quad + (-a \cos u \sin v, +b \cos u \cos v, 0) dv \\ &= (-a \sin u \cos v du - a \cos u \sin v dv, \\ &\quad -b \sin u \sin v du + b \cos u \cos v dv, \\ &\quad c \cos u du) \end{aligned}$$

よって第一基本形式は

$$\begin{aligned} |d\vec{r}|^2 &= (-a \sin u \cos v du - a \cos u \sin v dv)^2 \\ &\quad + (-b \sin u \sin v du + b \cos u \cos v dv)^2 \\ &\quad + (c \cos u du)^2 \\ &= \{(a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v) \sin^2 u + c^2 \cos^2 u\} du^2 \\ &\quad + 2(a^2 - b^2) \cos u \sin u \cos v \sin v du dv \\ &\quad + (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v) \cos^2 u dv^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (-bc \cos^2 u \cos v, -ac \cos^2 u \sin v, -ab \cos u \sin u) \\ &= (-bc \cos u \cos v, -ac \cos u \sin v, -ab \sin u) \cos u, \end{aligned}$$

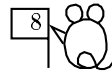
$$A = |\vec{n}| = \sqrt{c^2(b^2 \cos^2 v + a^2 \sin^2 v) \cos^2 u + a^2 b^2 \sin^2 u} \cos u =: \Delta \cos u$$

$$\begin{aligned} d(\vec{n}/\cos u) &= (bc \sin u \cos v du + bc \cos u \sin v dv, \\ &\quad ac \sin u \sin v du - ac \cos u \cos v dv, \\ &\quad -ab \cos u du) \end{aligned}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{n}}{A} = \frac{\vec{n}/\cos u}{\Delta}$$

$$\begin{aligned} \text{II} &= -d\vec{e}_3 \cdot d\vec{r} = -d\left(\frac{(\vec{n}/\cos u)}{\Delta}\right) \cdot d\vec{r} = -\frac{d(\vec{n}/\cos u) \cdot d\vec{r}}{\Delta} \\ &= -\frac{abc}{\Delta} \{(\sin u \cos v du + \cos u \sin v dv)(-\sin u \cos v du - \cos u \sin v dv) \\ &\quad + (-\sin u \sin v du + \cos u \cos v dv)(\sin u \sin v du - \cos u \cos v dv) \\ &\quad - \cos u du \cos u du\} \\ &= \frac{abc}{\Delta} (du^2 + \cos^2 u dv^2) \end{aligned}$$





$$I = \{(a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v) \sin^2 u + c^2 \cos^2 u\} du^2 \\ + 2(a^2 - b^2) \cos u \sin u \cos v \sin v dudv \\ + (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v) \cos^2 u dv^2$$

$$II = \frac{abc}{\Delta} (du^2 + \cos^2 u dv^2)$$

主曲率  $\kappa_1, \kappa_2$  は  $\frac{II}{I}$  の極値として求まる.

この例では II が対角型なので, II を単位行列にして, 分母の極値を求める  
i.e.  $du, \cos u dv$  を二次形式の独立変数とするのが楽.

結局,  $\frac{abc}{\Delta} \frac{1}{\kappa_1}, \frac{abc}{\Delta} \frac{1}{\kappa_2}$  が次の行列の固有値:

$$C = \begin{pmatrix} (a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v) \sin^2 u + c^2 \cos^2 u & (a^2 - b^2) \sin u \cos v \sin v \\ (a^2 - b^2) \sin u \cos v \sin v & a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v \end{pmatrix}$$

$$\text{これより } \frac{1}{\kappa_1 \kappa_2} = \left( \frac{\Delta}{abc} \right)^2 \det C = \left( \frac{\Delta}{abc} \right)^2 \cdot \Delta^2$$

$$\therefore K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{\Delta^4},$$

$$\text{また } \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2}$$

$$= \frac{\Delta}{abc} \{(a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v) \sin^2 u + c^2 \cos^2 u + a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v\}$$

$$\therefore H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) K$$

$$= \frac{abc \{(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2 \cos^2 u \cos^2 v + b^2 \cos^2 u \sin^2 v + c^2 \sin^2 u)\}}{2\Delta^3}$$

$$= \frac{abc \{(a^2 + b^2 + c^2) - (x^2 + y^2 + z^2)\}}{2\Delta^3}$$

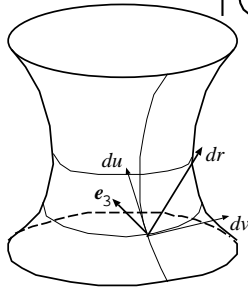
$$\text{ちなみに } \Delta = abc \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{1/2}$$

## 例：単葉双曲面

9

普通の方程式は  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$  だが  
パラメータ表示

$\vec{r} = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u)$   
を使って計算する.



$$\begin{aligned} d\vec{r} &= (a \sinh u \cos v, b \sinh u \sin v, c \cosh u) du \\ &\quad + (-a \cosh u \sin v, +b \cosh u \cos v, 0) dv \\ &= (-a \sinh u \cos v du - a \cosh u \sin v dv, \\ &\quad -b \sinh u \sin v du + b \cosh u \cos v dv, \\ &\quad c \cosh u du) \end{aligned}$$

よって第一基本形式は

$$\begin{aligned} |d\vec{r}|^2 &= (-a \sinh u \cos v du - a \cosh u \sin v dv)^2 \\ &\quad + (-b \sinh u \sin v du + b \cosh u \cos v dv)^2 \\ &\quad + (c \cosh u du)^2 \\ &= \{(a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v) \sinh^2 u + c^2 \cosh^2 u\} du^2 \\ &\quad + 2(a^2 - b^2) \cosh u \sinh u \cos v \sin v du dv \\ &\quad + (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v) \cosh^2 u dv^2 \end{aligned}$$

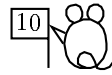
$$\vec{n} = (-bc \cosh^2 u \cos v, -ac \cosh^2 u \sin v, ab \cosh u \sinh u),$$

$$A = |\vec{n}| = \sqrt{c^2(b^2 \cos^2 v + a^2 \sin^2 v) \cosh^2 u + a^2 b^2 \sinh^2 u} =: \Delta \cosh u$$

$$\begin{aligned} d(\vec{n}/\cosh u) &= (-bc \sinh u \cos v du + bc \cosh u \sin v dv, \\ &\quad -ac \sinh u \sin v du - ac \cosh u \cos v dv, \\ &\quad ab \cosh u du) \end{aligned}$$

$$\vec{e}_3 = \frac{\vec{n}}{A} = \frac{\vec{n}/\cosh u}{\Delta},$$

$$\text{II} = -d\vec{e}_3 \cdot d\vec{r} = -\frac{d(\vec{n}/\cosh u) \cdot d\vec{r}}{\Delta} = \frac{abc}{\Delta} (du^2 - \cosh^2 u dv^2)$$



$$I = \{(a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v) \sinh^2 u + c^2 \cosh^2 u\} du^2 \\ + 2(a^2 - b^2) \cosh u \sinh u \cos v \sin v dudv \\ + (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v) \cosh^2 u dv^2$$

$$II = \frac{abc}{\Delta} (du^2 - \cosh^2 u dv^2)$$

主曲率  $\kappa_1, \kappa_2$  は  $\frac{II}{I}$  の極値として求まる.

この例では II が対角型だが正定値でないので, 先の簡便法は使えない.

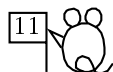
地道に計算すると,

$$K = -\frac{a^2 b^2 c^2}{\Delta^4},$$

$$H = \frac{abc\{(a^2 \cosh^2 u \cos^2 v + b^2 \cosh^2 u \sin^2 v + c^2 \sinh^2 u) - (a^2 + b^2 - c^2)\}}{2\Delta^3} \\ = \frac{abc\{(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + b^2 - c^2)\}}{2\Delta^3}$$

$$\text{ちなみに } \Delta = abc \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)^{1/2}$$

## レポート問題



(問題 7, 8 は geo7.pdf の末尾に追加しました.)

問題 9 次の曲面の第一, 第二基本形式と Gauss 曲率, 平均曲率を計算せよ.

1) 双曲放物面  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

パラメータ表示で  $x = \frac{a(u+v)}{2}$ ,  $y = \frac{b(u-v)}{2}$ ,  $z = uv$

2) 輪環面  $(b - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = a^2$  ( $b > a$ )

パラメータ表示で  $x = (b - a \cos u) \cos v$ ,  $y = (b - a \cos u) \sin v$ ,  $z = a \sin u$

問題 10 単葉双曲面と双曲放物面の上には直線の 1 パラメータ族が載っていることを示せ.