幾何入門　第１１回

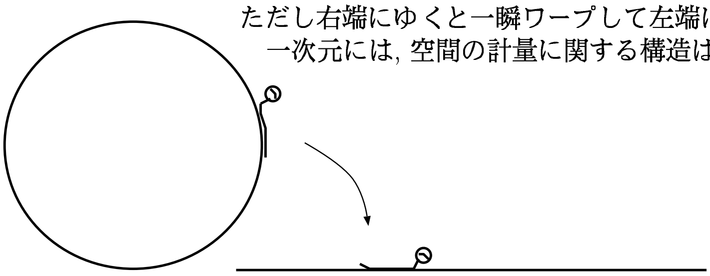
情報科学科　金子　晃
Алексей　КАНЕНКО
kanenko@is.ocha.ac.jp
この講義のホームページ:
http://atom.is.ocha.ac.jp/˜kanenko/KOUGI/Geo
この講義のホームディレクトリ:
edusv.edu.is.ocha.ac.jp/˜kanenko/Geo

第６章　Riemann 幾何学

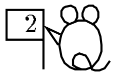
３次元空間内の曲面や曲線の曲がり方の考察は, 普通は
今まで述べて来たような, 曲面を外から見たときの曲がり具合のこと

しかし, 曲面の上で生活している生物にとっては, 自分の空間の曲がり具合は
これとは別の感じ方になる.

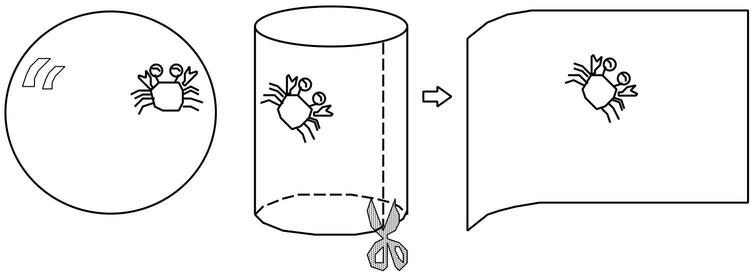
例：一次元の国では,
円周 $S=\{x^2+y^2=1$ は外から (i.e. 平面曲線として) 見ると曲率を有する.
しかし, 円周の上に閉じ込められて外の世界が見えない生物にとっては,
自分の世界は少しも曲がっていない.
線分 $[0,2\pi]$ の両端点を同一視したものと全く同じ.
ただし右端にゆくと一瞬ワープして左端に居る.
一次元には, 空間の計量に関する構造は何もない.

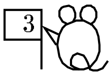


例：３次元の中の曲面の場合,



球面上に生活する生物は,
たといその外の３次元の世界から自分達の国を眺める機会が無くても,
自分達の世界が曲がっていることが感じられる.
例えば, ３角形の内角の和を計算すると π より多きくなることが観察できる.
これに対し, 円柱の表面は３次元から見ると曲がっているが, その上の生物は
平らな面の上で暮らしていると思うだろう.





３次元空間内の曲面については,
第一基本形式よりも第二基本形式の方が
曲面の曲がり具合を良く表しているように見えたが,
曲面に固有な曲がり方を表すのは, むしろ第一基本形式, すなわち弧長の方.

一般に, n 次元の C^∞ 級多様体 M があるとき,
その上の正値対称２次微分形式

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)dx^i dx^j \qquad (g_{ij} = g_{ji})$$

を M 上の Riemann 計量と呼ぶ.
座標変換は２次共変対称テンソルとして扱う.

これは M 上に距離を定める：

線素： $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)dx^i dx^j$,
曲線弧 $x = \varphi(t)$, $0 \leq t \leq T$ の長さは

$$L = \int_0^T \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}}dt$$

では, M 上の二点 P, Q の距離を, 測る経路を指定せずに定められるか？

測地線

M 上の二点 P, Q を決めたとき, これらを結ぶ M 上の最短曲線弧のことを
これらの点を通る測地線 (geodesic) と呼ぶ.
測地線に沿って測った長さが二点 P, Q の距離.

ある曲線が測地線かどうかは局所的に定まる.
(逆に測地線は最長弧になることも有る.)
測地線の例は球面上の大円弧 (geodesic の語源！)
二点 P, Q が十分に近ければ, 最短経路は短い方の大円弧に決まる.
北極と南極の場合は無数に有る $\Longrightarrow$ 大域理論は難しい.

そこで, まず局所理論をやる.
以下, 曲線弧の両端点 P, Q は同一座標近傍内にあるとする.

二点 P, Q を時刻 $t = 0, t = T$ で通過するすべての径路の中で,
長さが最短のものを $x = \varphi(t)$ とする.
このとき, $\psi(0) = \psi(T) = 0$ なる任意の函数ベクトル $\psi(t)$ と
任意の ε に対し,

$\varphi(t)$ $(0 \le t \le T)$ に沿う長さ $\le$ $\varphi(t) + \varepsilon\psi(t)$ $(0 \le t \le T)$ に沿う長さ

i.e.

$$\int_0^T \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}}dt$$
$$\leq \int_0^T \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t)+\varepsilon\psi(t))\frac{d(\varphi^i(t)+\varepsilon\psi^i(t))}{dt}\frac{d(\varphi^j(t)+\varepsilon\psi^j(t))}{dt}}dt$$
$$= \int_0^T \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}}dt$$
$$+\int_0^T \frac{\sum_{i,j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\psi^k + \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\psi^j}{dt} + \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{d\varphi^j}{dt}\frac{d\psi^i}{dt}}{2\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}}}dt\cdot\varepsilon$$
$$+\,o(\varepsilon)$$

ここで対称性 $g_{ij}=g_{ji}$ を用いて分子の最後の二つの項をまとめると

$$= \int_0^T \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}}dt$$
$$+\int_0^T \frac{\sum_{i,j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\psi^k + 2\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\psi^j(t)}{dt}}{2\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}}}dt\cdot\varepsilon$$
$$+\,o(\varepsilon)$$

任意符号を持つ微小な ε に対しこの不等式が常に成り立つためには,
ε の一次項の係数 (変分) が消えなければならない：

$\Delta := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\varphi(t)) \frac{d\varphi^i(t)}{dt} \frac{d\varphi^j(t)}{dt}}$ と置けば

$$\int_0^T \Big(\frac{1}{2\Delta} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} \psi^k + \frac{1}{\Delta} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\psi^j}{dt} \Big) dt = 0$$

これが任意の $\psi(t)$ について成立より $\varphi(t)$ が満たす条件を求める.
括弧内の第２項において動く添え字 j を k に書き換え,
更に $\psi(t)$ についた微分を部分積分で移す $(\psi(0) = \psi(T) = 0)$：

$$\int_0^T \Big\{ \frac{1}{2\Delta} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} \psi^k - \sum_{i,k=1}^{n} \frac{d}{dt} \Big(\frac{1}{\Delta} g_{ik} \frac{d\varphi^i}{dt} \Big) \psi^k \Big\} dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^T \Big\{ \frac{1}{2\Delta} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} - \sum_{i}^{n} \frac{d}{dt} \Big(\frac{1}{\Delta} g_{ik} \frac{d\varphi^i}{dt} \Big) \Big\} \psi^k dt$$

$$= 0$$

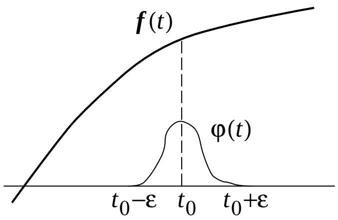
$\psi^k(t)$ は $\psi^k(0) = \psi^k(T) = 0$ を満たす以外は任意の函数だから,
変分法の基本原理により, 被積分函数のそれに掛かっている部分 $\{\ \} = 0$.

変分法の基本原理：連続函数 $f(t)$ が $\psi(0) = \psi(T) = 0$ なる任意の C^∞ 級函数 $\psi(t)$ に対して

$$\int_0^T f(t)\psi(t)dt = 0$$

を満たすなら, $f(t) \equiv 0$.

∵ 例えば $f(t_0) > 0$ とすると, $t_0 - \varepsilon \le t \le t_0 + \varepsilon$ で $f(t) > 0$.
そこで, $\psi(t) \ge 0$ を $\psi(t_0) > 0$ かつこの区間の外では 0 となるように選べば,
上の積分値 > 0 となり, 仮定に反する.



∴

$$\frac{1}{2\mathit{\Delta}}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}-\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{\mathit{\Delta}}g_{ik}\frac{d\varphi^i}{dt}\Big)=0$$

これは変分法の一般論で Euler-Lagrange の微分方程式と呼ばれるもの
このまま計算を続けるのはものすごく大変なので,
普通は次のように工夫する：
我々が求めているのは曲線の跡であって, パラメータ表示までは決まらない.
パラメータを取り替えても曲線の弧長は変わらないから！
そこで, パラメータは弧長パラメータの定数倍と仮定してしまう.
(弧長パラメータ自身にしてしまうと, パラメータの両端点 0 と T を
固定して比較できなくなるので, 弧長に比例すると仮定するのである.)
すると, 各曲線上で, 曲線に応じて定まる定数 C が有って,
$ds=\mathit{\Delta}dt=Cdt$ i.e. $\mathit{\Delta}=C$ (曲線に沿って定数)
よって上の式で $\mathit{\Delta}$ は $\dfrac{d}{dt}$ をすり抜けて外に出るので,

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}-\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\Big(g_{ik}\frac{d\varphi^i}{dt}\Big)=0$$

従って

$$\sum_{i=1}^{n}g_{ik}\frac{d^2\varphi^i}{dt^2}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} g_{ik} \frac{d^2\varphi^i}{dt^2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \Big) \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt}, \qquad k = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

ここで, 行列 (g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) と置き, 左から掛ける, すなわち,
上の式の両辺に g^{kl} を掛けて $k = 1, \ldots, n$ について加えれば,
整理して

$$
\frac{d^2\varphi^l}{dt^2} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g^{kl} \Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \Big) \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt}, \qquad l = 1, \ldots, n
$$

Riemann 幾何学では,

$$
\Gamma_{k,ij} := \frac{1}{2} \Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \Big), \qquad \Gamma^l_{ij} := \textstyle\sum_{k=1}^{n} g^{kl} \Gamma_{k,ij}
$$

と置き, Christoffel の 3 添字記号と呼ぶ (テンソルではない).
対称性：

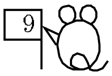
$$
\Gamma_{k,ij} = \Gamma_{k,ji}, \quad \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}
$$

この記号を使うと, 測地線の方程式は (最終的に l を k と書き直して)

$$
\frac{d^2\varphi^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n
$$

という連立常微分方程式になる.
Γ^k_{ij} にも $x = \varphi(t)$ が代入されるので, これは
猛烈に複雑な非線型連立方程式であり, めったに解けない！

Q 測地線の常微分方程式は, $\varphi(0)$ と $\varphi'(0)$ を初期値として与えれば, 解が少なくとも局所的には一意に定まる.



我々はこの方程式を, パラメータ t が弧長に比例すると仮定して導いたが, この方程式の勝手な解はその条件を満たしているであろうか？

$$\frac{d}{dt}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\varphi(t))\dot{\varphi}^{i}(t)\dot{\varphi}^{j}(t)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{\varphi}^{i}(t)\dot{\varphi}^{j}(t)\dot{\varphi}^{k}(t)$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\ \ddot{\varphi}^{i}(t)\dot{\varphi}^{j}(t) + \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\dot{\varphi}^{i}(t)\ \ddot{\varphi}^{j}(t)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{\varphi}^{i}(t)\dot{\varphi}^{j}(t)\dot{\varphi}^{k}(t)$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\sum_{k,l=1}^{n}\Gamma^{i}_{kl}\dot{\varphi}^{k}(t)\dot{\varphi}^{l}(t)\dot{\varphi}^{j}(t) - \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\sum_{k,l=1}^{n}\Gamma^{j}_{kl}\dot{\varphi}^{k}(t)\dot{\varphi}^{l}(t)\dot{\varphi}^{i}(t)$$

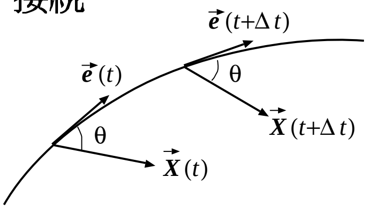
$$= \sum_{i,j,k=1}^{n}\Big(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \sum_{l=1}^{n} g_{lj}\Gamma^{l}_{ki} - \sum_{l=1}^{n} g_{il}\Gamma^{l}_{kj}\Big)\dot{\varphi}^{i}(t)\dot{\varphi}^{j}(t)\dot{\varphi}^{k}(t)$$

ここで ( ) 内は

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{j,ki} - \Gamma_{i,kj}$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\Big) - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\Big) = 0$$

Levi-Civita 接続



測地線を手がかりに, 空間のねじれ具合を読み取る.
測地線が直線だと思うと, 測地線の接線はすべて互いに平行なはずである.
今, 測地線 $\varphi(t)$ に沿うベクトルの平行移動作用素を $\tau(t)$ と書くと,
ベクトル場 $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ の測地線に沿う変化率は, $Y = \varphi'(0)$ として

$$\nabla_Y X := \lim_{t \to 0} \frac{\tau(t)^{-1} X(\varphi(t)) - X(\varphi(0))}{t}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{d\xi^i(\varphi(t))}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n} \xi^i \lim_{t \to 0} \frac{\tau(t)^{-1} \dfrac{\partial}{\partial x^i} - \dfrac{\partial}{\partial x^i}}{t}$$

最後の極限は, X の変化ではなく, 空間のねじれに起因する. 今, これを

$$\lim_{t \to 0} \frac{\tau(t)^{-1} \dfrac{\partial}{\partial x^i} - \dfrac{\partial}{\partial x^i}}{t} = \sum_{k=1}^{n} A_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

と置き, 未定係数法で A_i^k を決定する.
仮定により, $X = \varphi'(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dot{\varphi}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ が測地線の接線ベクトルのときは

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\tau(t)^{-1} X(\varphi(t)) - X(\varphi(0))}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\dot{\varphi}^i(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i,k=1}^{n} \dot{\varphi}^i A_i^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ddot{\varphi}^k(t) \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i,k=1}^{n} \dot{\varphi}^i A_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} = 0$$

これを測地線の方程式と比較して

$$\therefore \quad \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \dot{\varphi}^{i} \dot{\varphi}^{j} = \sum_{i=1}^{n} \dot{\varphi}^{i} A_{i}^{k}, \ \ k = 1, 2, \ldots, n$$

これが, 任意の測地線 $\varphi(t)$ について成り立つような A_i^k は無数に有るが,
A_i^k の $\dot{\varphi}$ に関する一次部分もまた上を満たすので,
最初から $A_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k \dot{\varphi}^j$ と仮定するのが自然.
ここで a_{ij}^k を, i, j について対称と仮定すると, $a_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$ に確定する.
従って,

$$\begin{aligned} \nabla_Y X &= \sum_{k=1}^{n} \frac{d\xi^k(\varphi(t))}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i,j,k=1}^{n} \xi^i \Gamma_{ij}^k \dot{\varphi}^j(0) \frac{\partial}{\partial x^k} \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \dot{\varphi}^j(0) \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i,j,k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \xi^i \dot{\varphi}^j(0) \frac{\partial}{\partial x^k} \end{aligned}$$

$Y = \dot{\varphi}(0)$ は任意のベクトル場 $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ としてよいから,

$$\nabla_Y X = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \eta^j \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i,j,k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \xi^i \eta^j \frac{\partial}{\partial x^k}$$

これをベクトル場 X のベクトル場 Y に沿う共変微分と呼ぶ.
特に,

$$\nabla_{\partial/\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

これが Christoffel 記号の意味である.

Riemann 多様体の曲率

Riemann 計量 $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx^i dx^j$ が与えられた多様体を
Riemann 多様体と呼ぶ.
Riemann 計量が対角型 $(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2$ でない
$\Longleftrightarrow$ 空間がゆがんでいる.
Riemann 計量から, 空間の曲がり具合を表すテンソルが誘導される：

$$R^l{}_{ijk} := \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ji}}{\partial x^k} + \sum_{m=1}^{n}(\Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ki} - \Gamma^l_{km}\Gamma^m_{ji}) \quad \text{(曲率テンソル)}$$

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{n} R^k{}_{ikj} \quad \text{(Ricci 曲率)}$$

$$R = \sum_{k=1}^{n} R_{kk} \quad \text{(スカラー曲率)}$$

特に, M が $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面で, g が $\boldsymbol{R}^3$ の Euclid 距離から
自然に誘導された計量のときは, $R=2K$ となる.
このように座標成分で書くと, テンソルになることを調べるだけで大変！

接続の幾何学 — **intrinsic** な表現法

現代微分幾何学では, 測地線は最短経路としてのよりも
平行移動の基準としての方が本質的
接続の理論はファイバーバンドルの概念を用いてきれいに説明されるが,
ここではベクトル場だけで説明する

アフィン接続 : 多様体 M 上の C^∞ 級ベクトル場の全体を $\mathcal{X}(M)$ と置く.
写像 $\nabla_Y X : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ が次の条件を満たすとき,
M 上のアフィン接続と呼ぶ.

1) $\nabla_{Y_1+Y_2} X = \nabla_{Y_1} X + \nabla_{Y_2} X$ $\quad$(Y に関する線型性)
2) $\nabla_{\varphi Y} X = \varphi \nabla_Y X$ $\quad$(φ は M 上の函数)
3) $\nabla_Y (X_1 + X_2) = \nabla_Y X_1 + \nabla_Y X_2$ $\quad$(X に関する線型性)
4) $\nabla_Y (\varphi X) = Y(\varphi) X + \varphi \nabla_Y X$ $\quad$(φ は M 上の函数)

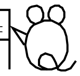
共変微分 ∇ は定義から明らかに $(1,2)$ 型のテンソルとなる.
ベクトルの平行移動とは, 共変微分が 0 となるような動かし方のことと定める.

接線ベクトルが常に平行 i.e. $\nabla_{\varphi'(t)} \varphi'(t) = 0$ を満たすような曲線を
測地線と呼ぶ.
局所座標を導入すると, Christoffel 記号が

$$\nabla_{\partial/\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

で定まり, 測地線の方程式 $\ddot{\varphi}^k(t) + \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \dot{\varphi}^i(t) \dot{\varphi}^j(t)$ が得られる.

上の Γ_{ij}^k を定義する共変微分の公式は, 前に導いたものと
i, j が入れ替わっている. 前の議論では Γ_{ij}^k は i, j につき対称だったので
これはどうでも良かったが, 一般には 対称と限らないので, 慣用の定義に
従っておく.
なお, 測地線の方程式は Γ_{ij}^k でも Γ_{ji}^k でも同じものになる.



捩率テンソル：

X, Y ：ベクトル場, ω ： 1 次微分形式 (共変ベクトル場) のとき

$$\langle T(X,Y), \omega\rangle := \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y], \omega\rangle$$

ここに, $[X,Y] = XY - YX$ はベクトル場の交換子積で,
二つのベクトル場から新たなベクトル場を作り出す.

局所座標で $X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_{i=1}^{n} \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ とすれば,

$$[X,Y] = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}$$

曲率テンソル：

X, Y, Z をベクトル場, ω を 1 次微分形式 (共変ベクトル場)
とするとき

$$\langle R(X,Y)Z, \omega\rangle := \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \omega\rangle$$

この intrinsic な定義から, T が $(1,2)$ 型, R が $(1,3)$ 型のテンソルである
ことが直ちに分かる.

$\nabla_{\partial/\partial x^i}$ を $\frac{\partial}{\partial x^i}$ と対比してみれば, これらのテンソルが空間のねじれ具合を
表すことも想像できる.

Christoffel 記号を用いてこれらを成分表示すると,

$$T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_{k=1}^{n} T^k{}_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad T^k{}_{ij} = \langle T(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}), dx^k\rangle = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji},$$

$$R(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{l=1}^{n} R^l{}_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l},$$

$$R^l{}_{ijk} := \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ji}}{\partial x^k} + \sum_{m=1}^{n} (\Gamma^l_{jm}\Gamma^m_{ki} - \Gamma^l_{km}\Gamma^m_{ji}) \quad \text{(先の計算と同じ結果)}.$$

アフィン接続としての Riemann 接続

Riemann 計量 g は, 反変ベクトル空間上の対称双一次形式
($(0,2)$ 型テンソル)：

$$X=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i},\ Y=\sum_{i=1}^{n}\eta^i\frac{\partial}{\partial x^i} \text{ に対し, } g(X,Y)=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}\xi^i\eta^j$$

特に, $g_{ij}=g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})$

テンソルの共変微分：ベクトル場に沿うテンソルの変化率のことである.
計量テンソル g を例に説明する.
接ベクトル X 方向の測地線に沿う平行移動を $\tau(t)$ と書けば,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X g)(Y,Z)&=\lim_{t\to 0}\frac{\tau(t)^{-1}g(t)(Y,Z)-g(Y,Z)}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}\Big\{\frac{\tau(t)^{-1}[g(t)(\tau(t)Y,\tau(t)Z)]-\tau(t)^{-1}[g(t)(Y,\tau(t)Z)]}{t}\\
&\qquad+\frac{\tau(t)^{-1}g(t)(Y,\tau(t)Z)-\tau(t)^{-1}g(t)(Y,Z)]}{t}\\
&\qquad+\frac{\tau(t)^{-1}g(t)(Y,Z)-g(Y,Z)}{t}\\
&=\lim_{t\to 0}\frac{\tau(t)^{-1}g(t)(Y,Z)-g(Y,Z)}{t}+g(0)(\lim_{t\to 0}\tau(t)\frac{Y-\tau(t)^{-1}Y}{t},Z)+g(0)(Y,\lim_{t\to 0}\tau(t)\frac{Z-\tau(t)^{-1}Z}{t})\\
&=X(g(Y,Z))-g(\nabla_X Y,Z)-g(Y,\nabla_X Z)
\end{aligned}$$

Levi-Civita 接続では, これは 0 となる：
最後の式が X,Y,Z につき多重線型なので, 次を確かめれば十分である：

$$\frac{\partial}{\partial x^k}(g(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})-g(\nabla_{\partial/\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j})-g(\frac{\partial}{\partial x^i},\nabla_{\partial/\partial x^k}\frac{\partial}{\partial x^j})$$

$$=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-g_{lj}\Gamma^l_{ki}-g_{il}\Gamma^l_{kj}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-\Gamma_{j,ki}-\Gamma_{i,kj}=0$$

また, Γ^k_{ij} の i,j に関する対称性により, $T^k_{ij}=0$.
逆も成り立つことが知られている：

定理　Levi-Civita 接続は, $\nabla g=0$ かつ $T=0$ を満たすアフィン接続として,
一意に定まる.