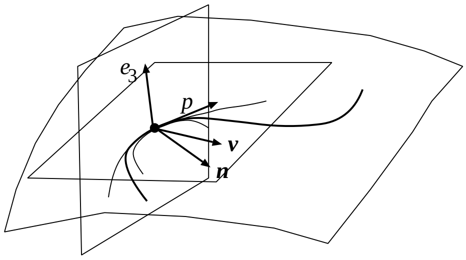
幾何入門　第１２回

情報科学科　金子　晃
Алексей　КАНЕНКО
kanenko@is.ocha.ac.jp
この講義のホームページ:
http://atom.is.ocha.ac.jp/˜kanenko/KOUGI/Geo
この講義のホームディレクトリ:
edusv.edu.is.ocha.ac.jp/˜kanenko/Geo

第７章　曲面上の幾何学

３次元空間内の曲面それ自身でなく, その上で成立する, 平面幾何とはやや趣を異にする２次元の幾何を学ぶ.

曲面 M の Gauss 曲率を K, M 上の曲線 γ の測地的曲率を κ_g とする.



測地的曲率とは, 曲面上の曲線の曲面内での曲がり方のみを取り出したもの

例： 球面の大円弧は, 空間曲線としては球面と同じ曲率を持つが,
球面上の曲線としてはまっすぐ.
一般の測地線についても同様.
(正確な定義は後で述べる.)

Gauss-Bonnet の定理：

1) 曲面 M 上に滑らかな曲線で囲まれた単連結領域 A があるとき,

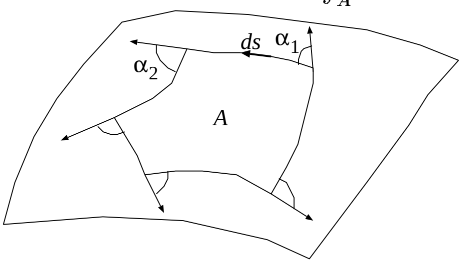
$$\int_A K dA + \int_{\partial A} \kappa_g ds = 2\pi$$

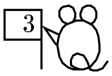
2) 曲面 M 上に滑らかな曲線弧 γ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ で囲まれた単連結領域 A があり, 曲線弧 γ_j と γ_{j+1} が角 α_j で交わっているとする $(j = 1, 2, \ldots, n,\ \gamma_{n+1} \equiv \gamma_1)$ このとき

$$\int_A K dA + \int_{\partial A} \kappa_g ds + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 2\pi$$

3) 境界の無い閉じた曲面 M に対して

$$\int_A K dA = 2\pi \chi(M)$$





復習：曲面 M 上の曲線弧 γ を考える.

曲面 M の接平面の正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ をとるとき

$d\vec{r} = \theta^1 \boldsymbol{e}_1 + \theta^2 \boldsymbol{e}_2$ (接線ベクトル), $\quad \theta^1 \wedge \theta^2 = dA$ (曲面の面積要素),
第一基本形式 $\quad |d\vec{r}|^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$,
構造方程式 $\quad d\theta^1 = \theta^2 \wedge \omega_2^1,\ d\theta^2 = \theta^1 \wedge \omega_1^2 \qquad (\omega_1^2 = -\omega_2^1)$
$d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$

単位接ベクトルを $\boldsymbol{p} = \xi^1 \boldsymbol{e}_1 + \xi^2 \boldsymbol{e}_2$ と置く $\quad \left(\xi^j = \theta^j \big/ \sqrt{(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2}\right)$
曲率ベクトル $\quad \dfrac{d\boldsymbol{p}}{ds} = \kappa \boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ は γ の空間曲線としての単位法線)
測地的曲率ベクトルとは, これの接平面への正射影のことをいう.

ω_i^j の定義： $\displaystyle d\boldsymbol{e}_j = \sum_{k=1}^{3} \omega_j^k \boldsymbol{e}_k$ を思い出して計算すると,

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{ds} = \sum_{j=1}^{2}\left(\frac{d\xi^j}{ds}\boldsymbol{e}_j + \xi^j \frac{d\boldsymbol{e}_j}{ds}\right) = \sum_{j=1}^{2}\frac{d\xi^j}{ds}\boldsymbol{e}_j + \sum_{j=1}^{2}\xi^j \sum_{k=1}^{3}\frac{\omega_j^k}{ds}\boldsymbol{e}_k$$
$$= \left(\frac{d\xi^1}{ds} + \xi^2\frac{\omega_2^1}{ds}\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{d\xi^2}{ds} + \xi^1\frac{\omega_1^2}{ds}\right)\boldsymbol{e}_2 + \left(\xi^1\frac{\omega_1^3}{ds} + \xi^2\frac{\omega_2^3}{ds}\right)\boldsymbol{e}_3 = \kappa\boldsymbol{n}$$
よって測地的曲率ベクトル $\boldsymbol{k}_g$ は
$$\boldsymbol{k}_g = \left(\frac{d\xi^1}{ds} + \xi^2\frac{\omega_2^1}{ds}\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{d\xi^2}{ds} + \xi^1\frac{\omega_1^2}{ds}\right)\boldsymbol{e}_2$$
$\boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{n}, \boldsymbol{p} \perp \boldsymbol{e}_3$ なので, $\boldsymbol{k}_g \perp \boldsymbol{p}$.
そこで, 接平面内での $\boldsymbol{p}$ に垂直な単位ベクトルは $\boldsymbol{\nu} = -\xi^2 e_1 + \xi^1 \boldsymbol{e}_2$ となり,
$\boldsymbol{k}_g = \kappa_g \boldsymbol{\nu},\ \kappa_g = |\boldsymbol{k}_g|$ と書け, κ_g が測地的曲率.
(直感的には, γ の接平面に正射影したものの平面曲線としての曲率)
測地線 $\iff \boldsymbol{k}_g = 0$ (これも直感的には明らかだろうが, 後で証明する)
ちなみに $\dfrac{dp}{ds}$ の $\boldsymbol{e}_3$ 成分は法曲率と呼ばれる.
(こちらは, $\boldsymbol{p}$ を含む曲面の法線への γ の正射影の曲率)

Gauss-Bonnet の定理の証明 I

Stokes の定理と構造方程式より,

$$\int_A K dA = \int_A K\theta^1 \wedge \theta^2 = \int_A d\omega_2^1 = \int_{\partial A} \omega_2^1$$

最後の線積分の幾何学的意味を考えればよい.

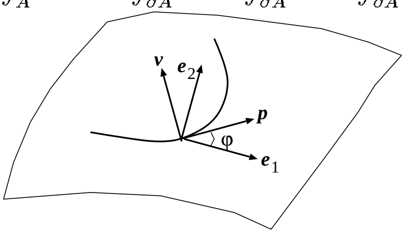
$$\begin{aligned}\kappa_g ds &= \boldsymbol{k}_g ds \cdot \boldsymbol{\nu} \\ &= \{(d\xi^1 + \omega_2^1 \xi^2) e_1 + (d\xi^2 + \omega_1^2 \xi^1) e_2\} \cdot \{-\xi^2 \boldsymbol{e}_1 + \xi^1 \boldsymbol{e}_2\} \\ &= -\xi^2 d\xi^1 - \omega_2^1 (\xi^2)^2 + \xi^1 d\xi^2 + \omega_1^2 (\xi^1)^2 \\ &= \xi^1 d\xi^2 - \xi^2 d\xi^1 - \omega_2^1\end{aligned}$$

$\boldsymbol{e}_1$ から $\boldsymbol{p}$ への回転角を φ とすれば, $\xi^1 = \cos\varphi$, $\xi^2 = \sin\varphi$

$\therefore \quad d\xi^1 = -\sin\varphi d\varphi$, $d\xi^2 = \cos\varphi d\varphi$, $\xi^1 d\xi^2 - \xi^2 d\xi^1 = d\varphi$

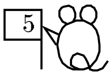
よって　$\omega_2^1 = d\varphi - \kappa_g ds$　が得られたから,

$$\int_A K dA = \int_{\partial A} \omega_2^1 = \int_{\partial A} d\varphi - \int_{\partial A} \kappa_g ds = 2\pi - \int_{\partial A} \kappa_g ds$$



フレーム $\boldsymbol{e}_j$ は変化するが, ∂A を一周して戻ってくれば,
フレームも元の位置に戻るので, $\boldsymbol{e}_1$ の振れの総和は 0.
従って $\boldsymbol{e}_1$ から測った角の総変化量は, $\boldsymbol{e}_1$ が止まっているときと同じで 2π.

Gauss-Bonnet の定理の証明 II



∂A が区分的に滑らかなときは,

$$\int_A K dA = \int_{\partial A} \omega_2^1 = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \omega_2^1 = \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} d\varphi - \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \kappa_g ds$$

よって上の考察より $\displaystyle\int_A K dA = \sum_{j=1}^{n} \{\varphi_j(\mathrm{Q}_j) - \varphi_j(\mathrm{P}_j)\} - \int_{\partial A} \kappa_g ds$

ここで, $\varphi_j(\mathrm{P}_j)$, $\varphi_j(\mathrm{P}_j)$ は γ_j の接線がその始点および終点で $\boldsymbol{e}_1$ と成す角.
滑らかな部分における φ の変化量の総和 + 角における φ の変化量の総和 $= 2\pi$ だから,

$$\sum_{j=1}^{n} \{\varphi_j(\mathrm{Q}_j) - \varphi_j(\mathrm{P}_j)\} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 2\pi$$

$$\therefore \quad \int_A K dA = 2\pi - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j - \sum_{j=1}^{n} \int_{\gamma_j} \kappa_g ds$$

特に A が三角形のときは, 内角を β_j とすると, $\alpha_j = \pi - \beta_j$ なので,

$$\int_A K dA = 2\pi - \int_{\partial A} \kappa_g ds - \sum_{j=1}^{3} \alpha_j = \sum_{j=1}^{3} \beta_j - \pi - \int_{\partial A} \kappa_g ds$$

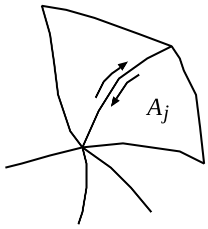
三辺が測地線の弧でできているときは, 最後の項が消えて,

$$\int_A K dA = \sum_{j=1}^{3} \beta_j - \pi \quad \text{あるいは} \quad \sum_{j=1}^{3} \beta_j = \pi + \int_A K dA$$

Gauss-Bonnet の定理の証明 III

M が閉じた曲面のときは, M を滑らかな辺をもつ曲三角形 A_j, $j=1,\ldots,N$ に分割する. 三角形 A_j の内角を β_{jk}, $k=1,2,3$ とすると

$$\int_{A_j} K dA = \sum_{k=1}^{3} \beta_{jk} - \pi - \int_{\partial A_j} \kappa_g ds$$



これをすべての三角形について加えると

$$\int_M K dA = \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{3} \beta_{jk} - \pi N - \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial A_j} \kappa_g ds$$

ここで, 三角形の各辺は隣の三角形の対応辺と対で現れ, 線積分の向きは逆
よって線積分は二辺ずつ打ち消し合い, 残らない.
また, この三角形分割の頂点数を v とすれば,

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{3} \beta_{jk} = \sum_{\mathrm{P}} (P \text{ を頂点とする三角形のこの頂点での内角の和}) = 2\pi v$$

$$\therefore \int_{A_j} K dA = 2\pi v - \pi N = \pi(2v - N)$$

三角形分割なので, 辺の数を e とすれば, $2e = 3N$
よって $2v - N = 2v + 2N - 3N = 2(v + N - e) = 2\chi(M)$

$$\therefore \int_M K dA = 2\pi\chi(M)$$

曲面上の測地線

$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$ より,
$g_{11} = E$, $g_{12} = g_{21} = F$, $g_{22} = G$, また $x^1 = u$, $x^2 = v$ に注意して
$\mathit{\Gamma}_{k,ij} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\Big)$ を計算すると,

$$\mathit{\Gamma}_{1,11} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial u}\Big) = \frac{1}{2}E_u,$$
$$\mathit{\Gamma}_{1,12} = \mathit{\Gamma}_{1,21} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u}\Big) = \frac{1}{2}E_v,$$
$$\mathit{\Gamma}_{1,22} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial u}\Big) = F_v - \frac{1}{2}G_u,$$
$$\mathit{\Gamma}_{2,11} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial E}{\partial v}\Big) = F_u - \frac{1}{2}E_v,$$
$$\mathit{\Gamma}_{2,12} = \mathit{\Gamma}_{2,21} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial v}\Big) = \frac{1}{2}G_u,$$
$$\mathit{\Gamma}_{2,22} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial G}{\partial v}\Big) = \frac{1}{2}G_v.$$

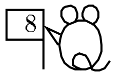
次に $g^{11} = \frac{G}{EG - F^2}$, $g^{12} = g^{21} = -\frac{F}{EG - F^2}$, $g^{22} = \frac{E}{EG - F^2}$
に注意して, $\mathit{\Gamma}^l_{ij} := \sum_{k=1}^n g^{kl}\mathit{\Gamma}_{k,ij}$ を計算すると

$$\mathit{\Gamma}^1_{11} = \frac{GE_u + FE_v - 2FF_u}{2(EG - F^2)},\ \ \mathit{\Gamma}^1_{12} = \mathit{\Gamma}^1_{21} = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)},$$
$$\mathit{\Gamma}^1_{22} = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)},\ \ \mathit{\Gamma}^2_{11} = \frac{-FE_u + 2FE_u - EE_v}{2(EG - F^2)},$$
$$\mathit{\Gamma}^2_{12} = \mathit{\Gamma}^2_{21} = \frac{-FE_v + EG_u}{2(EG - F^2)},\ \ \mathit{\Gamma}^2_{22} = \frac{-2FF_v + FG_u + EG_v}{2(EG - F^2)}.$$

測地線は

$$\ddot{u} + \tfrac{GE_u + FE_v - 2FF_u}{2(EG - F^2)}\dot{u}^2 + 2\tfrac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}\dot{u}\dot{v} + \tfrac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}\dot{v}^2 = 0,$$
$$\ddot{v} + \tfrac{-FE_u + 2FE_u - EE_v}{2(EG - F^2)}\dot{u}^2 + 2\tfrac{-FE_v + EG_u}{2(EG - F^2)}\dot{u}\dot{v} + \tfrac{-2FF_v + FG_u + EG_v}{2(EG - F^2)}\dot{v}^2 = 0.$$

具体的に曲面が与えられればこれでも計算可能であろうが,
理論的にはすこぶる見通しが悪い.



そこで, 基本形式を計算したときの表現を使って
最初から変分を計算する：

接線ベクトル　$d\vec{r} = \theta^1 \boldsymbol{e}_1 + \theta^2 \boldsymbol{e}_2$,
Riemann 計量　$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$,

$L = \displaystyle\int_0^T \sqrt{\Big(\frac{\theta^1}{dt}\Big)^2 + \Big(\frac{\theta^2}{dt}\Big)^2}\, dt$ の変分は

$$\delta L = \int_0^T \frac{\frac{\theta^1}{dt}\frac{\delta\theta^1}{dt} + \frac{\theta^2}{dt}\frac{\delta\theta^2}{dt}}{\sqrt{\big(\frac{\theta^1}{dt}\big)^2 + \big(\frac{\theta^2}{dt}\big)^2}} dt = \int_0^T \frac{1}{\Delta}\Big(\frac{\theta^1}{dt}\frac{\delta\theta^1}{dt} + \frac{\theta^2}{dt}\frac{\delta\theta^2}{dt}\Big) dt,$$

ここに　$\Delta = \sqrt{\Big(\dfrac{\theta^1}{dt}\Big)^2 + \Big(\dfrac{\theta^2}{dt}\Big)^2}$

ここで $\dfrac{\delta\theta^j}{dt}$ の意味は, $\theta^j = a_{j1}(u,v)du + a_{j2}(u,v)dv$ とするとき,

$$\frac{\delta\theta^j}{dt} = \frac{\partial a_{j1}}{\partial u}\frac{du}{dt}\delta u + \frac{\partial a_{j1}}{\partial v}\frac{du}{dt}\delta v + a_{j1}\frac{d\delta u}{dt} + \frac{\partial a_{j2}}{\partial u}\frac{dv}{dt}\delta u + \frac{\partial a_{j2}}{\partial v}\frac{dv}{dt}\delta v + a_{j2}\frac{d\delta v}{dt}$$

よって部分積分で δu, δv についてそろえると,

$$\begin{aligned}\delta L = \int_0^T \Big[&\sum_{j=1}^{2}\Big\{\frac{1}{\Delta}\frac{\theta^j}{dt}\Big(\frac{\partial a_{j1}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial a_{j2}}{\partial u}\frac{dv}{dt}\Big) - \frac{d}{dt}\Big(\frac{a_{j1}}{\Delta}\frac{\theta^j}{dt}\Big)\Big\}\delta u \\ &+ \sum_{j=1}^{2}\Big\{\frac{1}{\Delta}\frac{\theta^j}{dt}\Big(\frac{\partial a_{j1}}{\partial v}\frac{du}{dt} + \frac{\partial a_{j2}}{\partial v}\frac{dv}{dt}\Big) - \frac{d}{dt}\Big(\frac{a_{j2}}{\Delta}\frac{\theta^j}{dt}\Big)\Big\}\delta v\Big] dt = 0\end{aligned}$$

変分法の基本原理より,

$$\sum_{j=1}^{2}\Big\{\frac{1}{\Delta}\frac{\theta^j}{dt}\Big(\frac{\partial a_{j1}}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial a_{j2}}{\partial u}\frac{dv}{dt}\Big) - \frac{d}{dt}\Big(\frac{a_{j1}}{\Delta}\frac{\theta^j}{dt}\Big)\Big\} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{2}\Big\{\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{2}\frac{\theta^j}{dt}\Big(\frac{\partial a_{j1}}{\partial v}\frac{du}{dt} + \frac{\partial a_{j2}}{\partial v}\frac{dv}{dt}\Big) - \frac{d}{dt}\Big(\frac{a_{j2}}{\Delta}\frac{\theta^j}{dt}\Big)\Big\} = 0$$

再び dt が ds に比例するとして,

$$\sum_{j=1}^{2}\left\{\frac{\theta^j}{dt}\left(\frac{\partial a_{j1}}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial a_{j2}}{\partial u}\frac{dv}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\left(a_{j1}\frac{\theta^j}{dt}\right)\right\}=0,$$

$$\sum_{j=1}^{2}\left\{\frac{\theta^j}{dt}\left(\frac{\partial a_{j1}}{\partial v}\frac{du}{dt}+\frac{\partial a_{j2}}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)-\frac{d}{dt}\left(a_{j2}\frac{\theta^j}{dt}\right)\right\}=0$$

$$\therefore\ a_{11}\frac{d\theta^1}{dt^2}+a_{21}\frac{d\theta^2}{dt^2}=\sum_{j=1}^{2}\frac{\theta^j}{dt}\left\{\frac{\partial a_{j2}}{\partial u}-\frac{\partial a_{j1}}{\partial v}\right\}\frac{dv}{dt},$$

$$a_{12}\frac{d\theta^1}{dt^2}+a_{22}\frac{d\theta^2}{dt^2}=\sum_{j=1}^{2}\frac{\theta^j}{dt}\left\{\frac{\partial a_{j1}}{\partial v}-\frac{\partial a_{j2}}{\partial u}\right\}\frac{du}{dt},$$

これから,

$$\frac{d\theta^1}{dt^2}=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\left(a_{21}\frac{du}{dt}+a_{22}\frac{dv}{dt}\right)\sum_{j=1}^{2}\frac{\theta^j}{dt}\left\{\frac{\partial a_{j2}}{\partial u}-\frac{\partial a_{j1}}{\partial v}\right\},$$

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}=-\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\left(a_{11}\frac{du}{dt}+a_{12}\frac{dv}{dt}\right)\sum_{j=1}^{2}\frac{\theta^j}{dt}\left\{\frac{\partial a_{j2}}{\partial u}-\frac{\partial a_{j1}}{\partial v}\right\}.$$

ところで, 構造方程式より,

$d\theta^1=\theta^2\wedge\omega^1_2,\quad d\theta^2=\theta^1\wedge\omega^2_1,\quad \omega^1_2=-\omega^2_1$

$\theta^j=a_{j1}du+a_{j2}dv$ なので, これより,

$$\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial u}-\frac{\partial a_{11}}{\partial v}\right)du\wedge dv=\theta^2\wedge\omega^1_2,\quad \left(\frac{\partial a_{22}}{\partial u}-\frac{\partial a_{21}}{\partial v}\right)du\wedge dv=\theta^1\wedge\omega^2_1$$

また, $\theta^1\wedge\theta^2=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{22})du\wedge dv.$ 従って

$$\omega^2_1=\frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{22}}\left\{\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial u}-\frac{\partial a_{11}}{\partial v}\right)\theta^1+\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial u}-\frac{\partial a_{21}}{\partial v}\right)\theta^2\right\}=-\omega^1_2$$

以上と先の計算を比較すると, 結局測地線の方程式として,

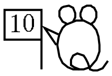
$$\frac{d\theta^1}{dt^2}=-\frac{\theta^2}{dt}\frac{\omega^1_2}{dt},\qquad \frac{d\theta^2}{dt^2}=-\frac{\theta^1}{dt}\frac{\omega^2_1}{dt}$$

あるいは,

$$\frac{d\theta^1}{dt^2}+\frac{\theta^2}{dt}\frac{\omega^1_2}{dt}=0,\qquad \frac{d\theta^2}{dt^2}+\frac{\theta^1}{dt}\frac{\omega^2_1}{dt}=0$$

$\dfrac{d\theta^j}{dt^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\theta^j}{dt}\right)=\dfrac{d}{dt}\left(a_{j1}\dfrac{du}{dt}+a_{j2}\dfrac{dv}{dt}\right)$ の意である.

従って上の方程式から Γ^k_{ij} を算出するには, まだ計算が必要.



以上の準備の下に,

$$\text{“ 測地線} \Longleftrightarrow \text{測地的曲率が } 0 \text{ ”}$$

であることの証明 **:**

再び $\boldsymbol{p} = \xi^1 \boldsymbol{e}_1 + \xi^2 \boldsymbol{e}_2$, $\xi^j = \theta^j / \sqrt{(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2}$ とする.

$$\boldsymbol{k}_g = \left(\frac{d\xi^1}{ds} + \xi^2 \frac{\omega_2^1}{ds}\right)\boldsymbol{e}_1 + \left(\frac{d\xi^2}{ds} + \xi^1 \frac{\omega_1^2}{ds}\right)\boldsymbol{e}_2 = 0$$

の係数が 0 となる条件を調べる.

$ds = \sqrt{(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2}$ なので, $\xi^j = \dfrac{\theta^j}{ds}$. 従って

$$\frac{d\xi^1}{ds} + \xi^2 \frac{\omega_2^1}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\theta^1}{ds}\right) + \frac{\theta^2}{ds}\frac{\omega_2^1}{ds} = 0$$

は測地線の方程式そのものである.
もう一つも同様.