

## 幾何入門 第13回



情報科学科 金子 晃

Алексей КАМЕНКО

[kanenko@is.ocha.ac.jp](mailto:kanenko@is.ocha.ac.jp)

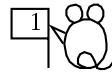
この講義のホームページ:

<http://atom.is.ocha.ac.jp/~kanenko/KOUGI/Geo>

この講義のホームディレクトリ:

[edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo](http://edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo)

# 定曲率曲面



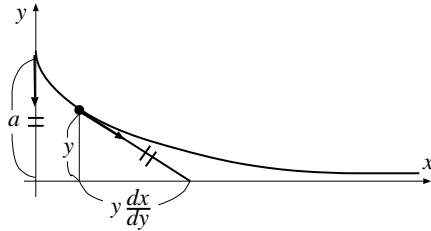
Gauss 曲率が定数となる曲面を定曲率曲面と呼ぶ.

定理  $K > 0$  が一定な曲面は, 半径  $1/\sqrt{K}$  の球面と距離同型となる.

定理  $K < 0$  が一定な曲面は, 追跡線 (tractrix, 後述) を回転させて得られる面と局所的に距離同型となる.

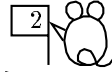
☞ 一般の定曲率多様体とは, 2次元の切り口の Gauss 曲率 (断面曲率) が切り口によらず一定の値を持つような Riemann 多様体のこと. 沢山有る. (切り口は測地線で局所的に定義される.)

追跡線: ミサイルが等速度で飛ぶ標的の飛行機を追尾したときの軌跡.  
ただしミサイルはちょっとのろまで, 標的までの距離は不変とする.  
もっと平和な解釈は, いやがる犬を無理矢理散歩に連れ出したときに, ひきずられた犬の跡



$$\begin{aligned} \text{図より } \left(y \frac{dx}{dy}\right)^2 + y^2 &= a^2 \quad \therefore \frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \\ x &= -\int_a^y \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = -\int_a^y \frac{\sqrt{a^2 - y^2} d(y^2)}{y^2 \cdot 2} \\ \text{ここで } \sqrt{a^2 - y^2} &= t \text{ と置くと,} \\ x &= -\int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} \frac{t}{a^2 - t^2} \frac{-2t dt}{2} = \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} \frac{t^2}{a^2 - t^2} dt \\ &= \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} \left(\frac{a^2}{a^2 - t^2} - 1\right) dt = \left[\frac{a}{2} \log \frac{a+t}{a-t} - t\right]_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} \\ &= \frac{a}{2} \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{a - \sqrt{a^2 - y^2}} - \sqrt{a^2 - y^2} = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \end{aligned}$$

## 擬球



上の曲線を  $x$  軸の周りに回転させる。回転軸を  $z$  軸に置き換えると

$$z = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

平面極座標を導入すると

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = a \log \frac{a + \sqrt{a^2 - r^2}}{r} - \sqrt{a^2 - r^2}$$

$$ds^2 = (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta)^2 + (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta)^2 + \left( -\frac{\sqrt{a^2 - r^2}}{r} dr \right)^2$$
$$= \frac{a^2}{r^2} dr^2 + r^2 d\theta^2$$

このようにクロスターム  $drd\theta$  が無いとき、  
直交曲線座標と呼ぶ。

更に、 $\theta = au$ ,  $r = \frac{1}{v}$  と置き替えると、

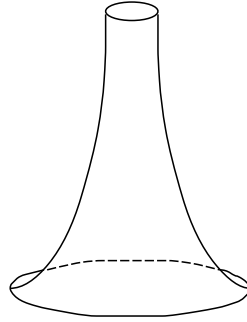
$$dr = -\frac{dv}{v^2} \quad \text{より} \quad \frac{dr}{r} = -\frac{dv}{v} \quad \text{で、}$$

$$ds^2 = a^2 \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$$

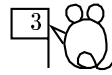
もとの曲面は  $0 \leq u \leq \frac{2\pi}{a}$  で、 $u = 0$  と  $u = \frac{2\pi}{a}$  は同一視されていたが、  
これを  $-\infty < u < \infty$  に延長する。

(普遍被覆面. cf. 円周  $S^1$  と直線, 輪環面  $T$  と平面の関係. 補遺2参照.)

こうしていわゆる双曲計量の与えられた上半平面が得られる。



# 上半平面



$-\infty < x < \infty, y > 0$  に Riemann 計量  $ds^2 = a^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$  を入れたもの.

(普通の数学では  $a = 1$  だが, ここでは一般にしておく.)

$$g_{11} = E = \frac{a^2}{y^2}, g_{12} = g_{21} = F = 0, g_{22} = G = \frac{a^2}{y^2},$$

$$g^{11} = \frac{y^2}{a^2}, g^{12} = g^{21} = 0, g^{22} = \frac{y^2}{a^2},$$

$$\theta^1 = \frac{adx}{y}, \theta^2 = \frac{ady}{y} \text{ ととれ,}$$

$$d\theta^1 = \frac{1}{y^2} adx \wedge dy, d\theta^2 = 0, \text{ よって } \omega_2^1 = -\frac{dx}{y}, \omega_1^2 = \frac{dx}{y} \text{ ととれる.}$$

$$d\omega_2^1 = \frac{dy}{y^2} \wedge dx = -\frac{dx \wedge dy}{y^2} = -\frac{1}{a^2} \theta^1 \wedge \theta^2 \text{ より, Gauss 曲率 } K = -\frac{1}{a^2}$$

測地線の方程式は

$$\frac{d\theta^1}{ds^2} + \frac{\theta^2 \omega_2^1}{ds ds} = 0, \text{ i.e. } \frac{d}{ds} \frac{adx}{yds} - \frac{ady}{yds} \frac{dx}{yds} = 0,$$

$$\frac{d\theta^2}{ds^2} + \frac{\theta^1 \omega_1^2}{ds ds} = 0, \text{ i.e. } \frac{d}{ds} \frac{ady}{yds} + \frac{adx}{yds} \frac{dx}{yds} = 0,$$

一つ目の方程式は  $\left(\frac{dx}{yds}\right)^{-1} \frac{d}{ds} \left(\frac{dx}{yds}\right) = \frac{dy}{yds}$  と書き直され, 積分できて

$$\log\left(\frac{dx}{yds}\right) = \log y + C \quad \therefore \frac{dx}{ds} = C'y^2$$

これを二つ目の方程式に代入して,

$$\frac{d}{ds} \frac{ady}{yds} = -aC' \frac{dx}{ds}. \text{ すなわち, } \frac{d}{ds} \frac{dy}{yds} = -C' \frac{dx}{ds}. \quad \therefore \frac{dy}{yds} = -C'x + C''.$$

$C' \neq 0$  のときは, この二つから割り算して

$$\frac{dy}{ydx} = \frac{-C'x + C''}{C'y^2}. \quad y \frac{dy}{dx} = -x + \frac{C''}{C'}. \quad \therefore \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{C''}{C'}x + C''.$$

定数を書き直して  $(x-c)^2 + y^2 = R^2$  ( $c = C''/C', R = \sqrt{2C''}$ )

これは  $x$  軸上の点  $c$  を中心とし半径  $R$  の半円の方程式である.

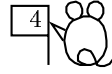
ただし  $C' = 0$  のときは例外で,

$$\frac{dx}{ds} = 0 \text{ より } x = C.$$

$$\text{また } \frac{d}{ds} \frac{dy}{yds} = 0 \text{ より } \frac{dy}{yds} = C. \log y = Cs + C'. \text{ i.e. } y = C''e^{Cs}$$

これは  $x$  軸に垂直な半直線を表す.

# Lobachevski-Bolyai の 双曲的非ユークリッド幾何学



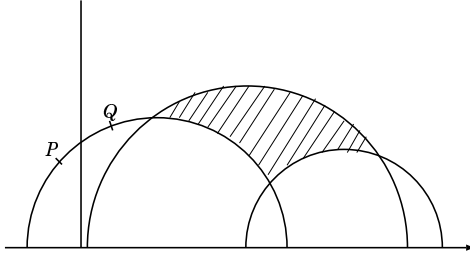
擬球,あるいはそれと同値な,

計量  $a^2 \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$  を持った上半平面上では,

Lobachevski-Bolyai の非ユークリッド幾何学が成立する (モデルという).

点は点,

直線は測地線, すなわち  $x$  軸上に中心を持つ半円,  
または  $x$  軸に垂直な半直線.



$y = 0$  すなわち, 半円の縁に近づくにつれ, 距離はどんどん増大し,  $x$  軸 (“地平線”) までには有限の距離では到達できない.

三角形は三つの半円弧で囲まれた図形 (図の斜線部のようなもの).

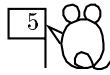
円は円である. (円: 定点からの距離が一定な点の軌跡)

## 問題 11

点  $(x_0, y_0)$  を中心とする半径  $R$  の非ユークリッド円の方方程式を求めよ.

これは中心を通る非ユークリッド直線に垂直に交わることを確かめよ.

ユークリッド幾何の公理のうち、平行線の公理以外のものがすべて成立する。例えば、

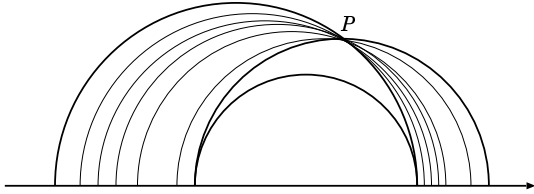


- ☆ 与えられた2点を通る直線がただ一つ引ける
- ☆ 三辺の長さが等しい二つの三角形は合同である. i.e. 対応する角も等しくなる. (角: 接ベクトルの成す角)

しかし、ユークリッド幾何の平行線の公理:

“与えられた一直線外の一点を通り元の直線に平行な直線がただ一つ引ける”  
は次ぎの公理に置き換えられる:

“与えられた一直線外の一点を通り元の直線に平行な直線が2本以上引ける”



ここで、平行線とは、交点を持たない二つの直線のことを言う。

実は平行線が2本引けると、無数に引ける。

ユークリッド幾何で、平行線の公理を使って証明された定理は非ユークリッド幾何では成り立たない。

例: 三角形の内角の和は  $\pi$

Lobachevski-Bolyai の幾何では実際に  $2\pi$  より小さくなる。

Cf: 三角形の三中線は一点に会する。

これは普通、ユークリッドの平行線公理を使って証明するが、

実は Lobachevski-Bolyai の幾何でも成立。

問題 12 三角形の三中線が一点に会することを非ユークリッド幾何で証明せよ。

非ユークリッド幾何をユークリッド幾何と対比させながら、公理系から出発して構成してゆくのは、なかなか面白いが、ここでは省略する。

☞ 上半平面と単位円板が函数論的に同値なことは有名だが、ここでも、定曲率空間としての上半平面は、単位円板  $|z| < 1$  に

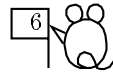
$$ds^2 := \frac{|dz|^2}{(1-|z|^2)^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

を入れたものと Riemann 多様体として

同型になる。これを単位円板の Poincaré 計量と呼ぶ。

後者の測地線も“地平線”  $|z| = 1$  に直交する円となる。

# Riemann の 楕円的非ユークリッド幾何学



半径  $a$  の球面上に  $R^3$  から誘導された計量を用いて展開する幾何は球面幾何学と呼ばれ、航海で重要であった。(球面三角法など)

球面の対蹠点を通る測地線(大円)は無数に存在するので、ユークリッドの公理:“2点を通る直線がただ一つ引ける”を満たしていない。

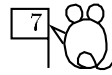
そこで、対蹠点を同一視して、射影平面にすると、この公理が満たされ、平行線の公理が“2直線は必ずただ一点で交わる”, すなわち, “平行線は存在しない”に代わった幾何学が得られる。これを Riemann の非ユークリッド幾何学, あるいは楕円的非ユークリッド幾何学と呼ぶ。

こちらの方は球面幾何学に持ち込んで証明できるので、双曲的非ユークリッド幾何学よりも初等的である。

非ユークリッド幾何学は、ユークリッドの原論に有った平行線の公理: “一直線が二直線に交わり、同じ側の内角の和が2直角より小さければ、二直線を延長するとこの側で交わる” が他の公理に比べて複雑であったために、証明可能ではないかと疑われ、2000年に互るその無駄な試みから最後に誕生したものである。

ユークリッド幾何学の諸公理のうち、平行線の公理を修正して得られるのは、通常のユークリッド幾何学(放物的幾何学)  
Lobachevski-Bolyai の非ユークリッド幾何学(双曲的幾何学)  
Riemann の非ユークリッド幾何学(楕円の幾何学)  
の三つに限られる。

# 補遺-1 多様体の向き付け



$M = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ ,  $\varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \Omega_\lambda / \sim$  を  $C^\infty$  多様体とする.

座標変換  $\varphi_{\mu\lambda} : \Omega_\lambda \rightarrow \Omega_\mu$

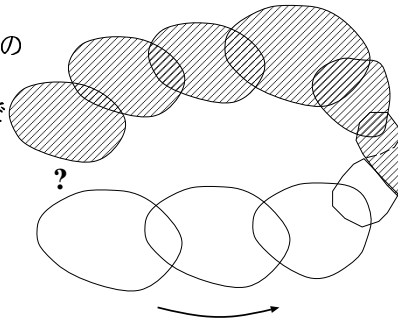
$$\begin{array}{ccc} \varphi_{\mu\lambda} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) & \rightarrow & \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \\ \cup & & \cup \\ x_\lambda & \mapsto & x_\mu \end{array}$$

は, 局所微分同型, 従って Jacobi 行列式  $\frac{\partial(x_\mu)}{\partial(x_\lambda)} \neq 0$

$M$  が向き付け可能  $\iff \forall \lambda, \mu$  に対し,  $\frac{\partial(x_\mu)}{\partial(x_\lambda)} > 0$  となるように座標を入れられる.

$M$  にこのような座標近傍系が与えられているとき,  $M$  は向き付けられているという.

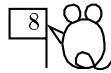
二つの向き付けられた  $C^\infty$  多様体の中の  $C^\infty$  級写像  $f : M \rightarrow N$  が向きを保つとは,  $M, N$  の向きを定める局所座標で  $f$  を表したときの Jacobi 行列式が負にならないこと.



問題 13 球面が立体射影により導入される座標近傍系で向き付けられること, および射影平面に同次座標から自然に導入される座標近傍系が向き付けになっていないことを, それぞれ Jacobi 行列式を計算することにより確かめよ.



## 補遺-2 普遍被覆



二つの多様体間の写像  $f: N \rightarrow M$  が全射, かつ局所的に同型  
 i.e.  $\forall P \in M \exists U \ni P$  (近傍) s.t.  $f^{-1}(U)$  の各連結成分  $V$  上で  
 $f: V \rightarrow U$  は同型写像

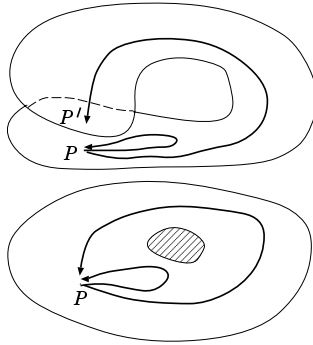
となるとき,  $f$  を被覆写像と呼ぶ.

$N$  が単連結のとき,  $N$  を  $M$  の普遍被覆 (universal covering) と呼ぶ.

それぞれのカテゴリーの多様体について, 普遍被覆が存在する  
 作り方の概略:

1.  $M$  の基点  $P$  を定める.
2.  $P$  を出発する連続曲線弧の終端を固定したときのホモトピー類を  $N$  の点とする.

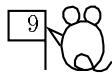
局所的には  $M$  と同型なことは明らか.  
 局所座標も  $M$  のそれを用いて入れられる.  
 $M$  に穴があると,  $P$  を出発して穴を回って  
 $P$  に戻って来た道が定める  $N$  の点は  
 $P$  とは異なるものになる.  
 $N$  が単連結なことも容易に示せる.



例: Riemann 面の普遍被覆面については,  
 次のことが知られている:

- ◎ Riemann 球面 ( $g = 0$ ) はそれ自身単連結.
- ◎ 輪環面 (楕円曲線,  $g = 1$ ) の普遍被覆面は複素平面  $\mathbb{C}$
- ◎  $g \geq 2$  の Riemann 面の普遍被覆面は  
 上半平面  $\{\text{Im } z > 0\} \cong$  単位円板  $|z| < 1$

### 補遺-3 Lie 群と Lie 環



実解析多様体で、かつ群を成し、群演算が実解析写像となるようなものを Lie 群と呼ぶ。

例：トーラス  $T^n := \mathbf{R}^n / \mathbf{Z}^n$  はアーベル群

直交群  $O(n)$ , 一般線型群  $GL(n, \mathbf{R})$ , 特殊線型群  $SL(n, \mathbf{R})$ , ユニタリ群  $U(n)$

この他に系列を成さない例外群が有限個存在する。

$n$  次元  $C^\infty$  多様体  $M$  上にベクトル場  $X$  が与えられているとき、その積分曲線  $\varphi(t)$  を  $\dot{\varphi}(t) = X_{\varphi(t)}$  を満たすものと定義する。

局所座標で  $X = \sum_{i=1}^n \xi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$  と書けているときは、 $\dot{\varphi}(t) = \sum_{i=1}^n \dot{\varphi}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,

従って、 $\dot{\varphi}^i(t) = \xi^i(\varphi(t))$ ,  $i = 1, \dots, n$  という連立常微分方程式となる。

Lie 群  $G$  の単位元における接ベクトル  $X$  に対し、これを任意の点  $a \in G$  に左移動で写すことができる：

$$a \text{ による左からの積 } L_a : G \rightarrow G \text{ は } G \text{ からそれ自身への}$$

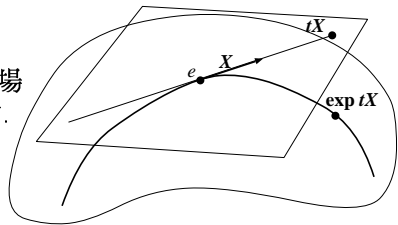
$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ & x \mapsto & ax \end{array}$$

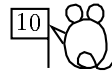
実解析写像なので、写像の微分を用いて接ベクトル空間の写像

$$(L_a)_* : T_e G \rightarrow T_a G \text{ を誘導する.}$$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ & X \mapsto & (L_a)_* X \end{array}$$

こうして得られる  $G$  上の左不変ベクトル場  $a \mapsto (L_a)_* X$  の積分曲線を  $\exp tX$  で表す。  
 $X \in T_e G$  を動かすと、指数写像  $T_e G \rightarrow G$  が得られる。





$G$  の左不変ベクトル場の全体  $\mathcal{G}$  は Lie 環を成す :

$X, Y \in \mathcal{G}$  に対し,  $[X, Y] := XY - YX$  と置けば

再び左不変ベクトル場となることが分かる.

一般に, 代数系  $\mathcal{G}$  に Lie bracket 演算子  $[\cdot, \cdot]$  が与えられ,

$$\text{交代性 } [X, Y] = -[Y, X]$$

$$\text{双線型性 } [aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z] \quad a, b \in \mathbf{R}$$

$$\text{Jacobi の恒等式 } [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

を満たすとき, Lie 環と呼ぶ.

多様体  $M$  上の  $C^\infty$  級ベクトル場の全体  $\mathcal{X}(M)$  も上の性質を持ち,

従って Lie 環となるが, 一般に無限次元.

Lie 群上の左不変ベクトル場に限定すると, 単位元  $e$  の接ベクトル空間と

線型空間として同型なので, 有限次元の Lie 環となる.

有限次元 Lie 環  $\xleftrightarrow{\text{指数写像}}$  連結かつ単連結な Lie 群

例: Lie 環

Lie 群

正方行列全体の Lie 環

$GL(n, \mathbf{R})$  (単位元の連結成分は  $\det A > 0$  なるもの)

歪対称行列の Lie 環

直交群 (単位元の連結成分は  $\det A = 1$  なるもので特殊直交群と呼び,  $SO(n)$  と記す)

トレースが 0 の行列の Lie 環  $SL(n, \mathbf{R})$

行列の例では実際に行列の指数関数で Lie 環と Lie 群の対応が与えられる.

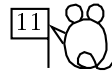
問題 14  $A$  が実行列のとき, 線型代数の練習問題として次を示せ :

$$\textcircled{a} \quad A \text{ が歪対称} \iff e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \text{ が直交行列で } \det A = 1$$

$$\textcircled{b} \quad \text{tr } A = 0 \iff \det e^A = 1$$

$\mathbb{Q}$  有限次元の Lie 環は Dynkin 図形と呼ばれるグラフを用いて分類される. それを用いて, Lie 群の分類もできる.

## 補遺-4 等質空間と対称空間



Lie 群や離散群が微分同相写像として推移的に作用するような多様体は等質空間と呼ばれ、豊かな構造を持ち、幾何学のみならず数学の各分野で重要なオブジェクトとなる

群  $G$  が多様体  $M$  に推移的に作用するとは、 $\forall P, Q \in M$  に対し  $\exists g \in G$  s.t.  $g(P) = Q$  なること

例：球面  $S^2$  には、直交群  $O(3)$  が推移的に作用。

上半平面  $H$  には、 $SL(2, \mathbf{R})$  が推移的に作用。

群の作用は作用する対象の対称性 (symmetry) を意味する。

特に、離散群の作用が面白い。

例：直交群  $O(3)$  の離散部分群は正多面体に対応する。

$SL(2, \mathbf{R})$  の離散部分群の基本領域から、 $g \geq 2$  の Riemann 面が得られる。

( $SL(2, \mathbf{Z})$  の作用については、既に楕円曲線のモデュライのところに出て来た。)

多様体  $M$  の各点  $P$  に、 $P$  を孤立固定点とするような  $M$  の

対合変換 (involution)  $\sigma$  (i.e.  $\sigma^2 = id$  なる変換) が存在するとき

$M$  を対称空間と呼ぶ。

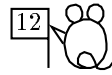
Riemann 空間のときは、更に  $\sigma$  を等長変換と仮定する。

測地線の大域的分布が良く分かるため重要なオブジェクトとなる。

測地線の分布に関する素数分布 (Riemann 予想) のアナロジーなど、

興味深い理論が沢山有る。

## 補遺-5 大域の Riemann 幾何学



変分法や非線型偏微分方程式と結びついて非常に面白く、  
かつ難しい分野を成す。

大域変分法と位相幾何学を結ぶ Morse 理論などは、もう藤代研の研究で  
応用されている。

最近では、より直接的な画像解析への偏微分方程式の応用も研究されている。  
偏微分方程式を用いた曲面の動きの研究も活発である。

これらについては、そのうち大学院で講義したい。

知られている主な定理：

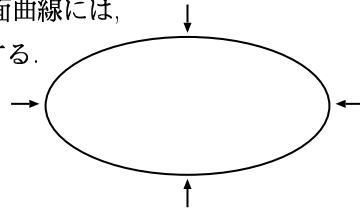
Gauss-Bonnet の定理も Riemann 幾何の大域的定理の例である。

Herglotz の四頂点定理：滑らかで凸な平面曲線には、

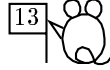
少なくとも4点  $\frac{d\kappa}{ds} = 0$  となる点が存在する。

このような点を頂点と呼ぶ。

頂点が2点しか無いものができるようにも  
見えるので、結果は決して自明ではない。



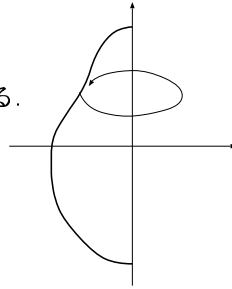
等周問題 (H.A. Schwarz) : 長さ一定の閉曲線が囲む面積は  
円のときに最大となる。



この厳密な証明が Dirichlet 原理の正当化と並び 19 世紀数学からの  
課題として 20 世紀における函数解析の誕生の契機となった。

閉測地線の問題 : 曲面  $M$  のすべての測地線が閉で, かつ一定の長さを持つ  
ならば,  $M$  は球面か?

答は否. 有名な反例として Zoll 曲面がある.  
これは二つの回転体をくっつけた形で実現される。



極小曲面 : 針金の枠に石鹸膜を張ったとき, 重力の影響を無視すれば,  
表面張力により面積が最小となる。これを極小曲面と呼ぶ。

極小曲面  $\iff$  平均曲率  $H = 0$

与えられた枠に対して極小曲面が必ず存在するかという問題が  
大域解析の発展を促した。

Laplace-Beltrami 作用素の固有値 : Riemann 多様体には, 計量を用いて  
Laplace 作用素のアナロジー

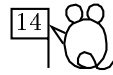
$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \sqrt{g} g^{jk} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \quad (g = \det(g_{ij}))$$

が定義される。

これを Laplace-Beltrami 作用素と呼ぶ。

この作用素の固有値は多様体の幾何学的性質に関連した情報を沢山  
含んでおり, いろいろ面白い結果がある。

## 補遺-6 積分幾何とトモグラフィ



これについては来年あたり別に講義をする予定.

## 補遺-7 ファイバーバンドルと層のコホモロジー理論

この辺は現代数学では幾何に限らず解析や代数でも重要な概念だが、  
そのうち CG でも応用されるようになるだろう。  
需要があれば講義したい。

以上で『情報科学への応用を念頭においた幾何学入門』の講義を終える。  
単位の欲しい人はレポートを書いてください。  
×切は9月30日です。