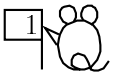
幾何入門　第２回

情報科学科　金子　晃
Алексей　КАНЕНКО
kanenko@is.ocha.ac.jp
この講義のホームページ:
http://atom.is.ocha.ac.jp/~kanenko/KOUGI/Geo
この講義のホームディレクトリ:
edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo

射影変換



同次座標を線型に変換する：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

結果は同次座標として確定すればよいので,
行列全体を $\boldsymbol{R}^{\times}$ の元で割っても変換としては同じもの.

よって

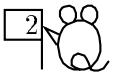
射影変換群 $PGL(2,\boldsymbol{R}) = GL(3,\boldsymbol{R})/\boldsymbol{R}^{\times}$

直線 $gx+hy+kz=0$ が変換後の無限遠直線 $\zeta=0$ に対応する.

無限遠直線 $z=0$ は直線 $\xi = ax+by, \eta = cx+dy, \zeta = gx+hy$ に対応する.

これから x, y を消去して $\begin{vmatrix} \xi & a & b \\ \eta & c & d \\ \zeta & g & h \end{vmatrix} = 0$

アフィン変換と射影変換



無限遠直線を動かさない射影変換はアフィン変換となる：
$z=0 \Longrightarrow \zeta = gx+hy=0$ となるためには, $g=h=0$.
従って $k \neq 0$ なので, これで行列全体を割算すると

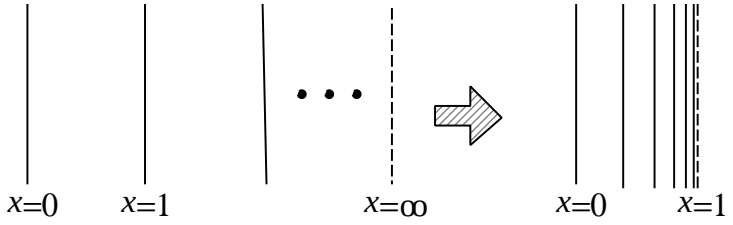
$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & e\\ c & d & f\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{の形}$$

書き直すと

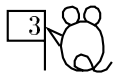
$$\begin{cases} \xi = ax+by+e,\\ \eta = cx+dy+f\end{cases} \quad \text{あるいは} \quad \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$$

CG の世界では最初の形をアフィン変換の同次座標表示と呼んでいる.

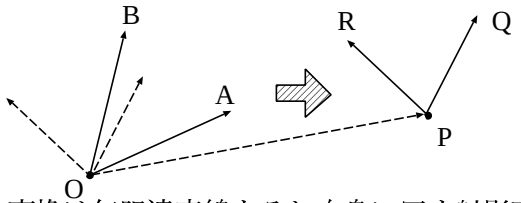
問題 3 y 軸を y 軸に写し, 無限遠直線を直線 $x=1$ に写すような射影変換の行列の形を決定せよ.
この変換で直線族 $x=n$, $n=1,2,\ldots$ はどんな図形に写るか？



射影変換の自由度

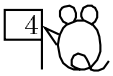


アフィン変換は一般の位置にある任意の 3 点 OAB を
他の同様な 3 点 PQR に写せる.
またこれで一つに決まる：
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ に,
ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ に, 写す線型変換と,
原点 O の P への平行移動を組み合わせればよい.



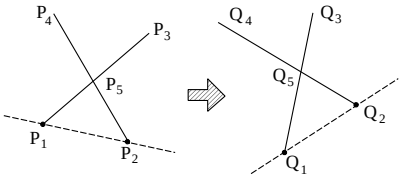
アフィン変換は無限遠直線をそれ自身に写す射影変換であった.
どの直線も無限遠直線とみなせるから, これより次のことが分かる：
☆一般の位置にある一直線 l と 3 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ を一般の位置にある
他の一直線 m と 3 点 $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3$ に写す射影変換がただ一つ定まる.
∵ l を無限遠直線に写すような射影変換 S と
m を無限遠直線に写すような射影変換 T をそれぞれ一つ固定する.
S により $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ が $\mathrm{P}'_1, \mathrm{P}'_2, \mathrm{P}'_3$ に写り,
T により $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3$ が $\mathrm{Q}'_1, \mathrm{Q}'_2, \mathrm{Q}'_3$ に写ったとすると,
無限遠直線を固定し $\mathrm{P}'_1, \mathrm{P}'_2, \mathrm{P}'_3$ を $\mathrm{Q}'_1, \mathrm{Q}'_2, \mathrm{Q}'_3$ に写すアフィン変換
A がただ一つ定まる. このとき合成変換 $F = T^{-1}AS$ は題意を満たす.
逆に, 題意を満たす変換 F, G が二つ有ったとすると, TFS^{-1}, TGS^{-1} は
どちらも無限遠直線をそれ自身に写し, $\mathrm{P}'_1, \mathrm{P}'_2, \mathrm{P}'_3$ を $\mathrm{Q}'_1, \mathrm{Q}'_2, \mathrm{Q}'_3$ に写す.
故にアフィン変換として一致：$TFS^{-1} = TGS^{-1}$　∴ $F = G$.

直線一つと点一つは同じ情報量だから, 次のことが想像される：



射影幾何の基本定理：一般の位置にある４点 P_1, P_2, P_3, P_4 を
他の４点 Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 に写す射影変換がただ一つ定まる.

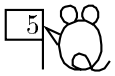
計算でも証明できるが, 次のように考えれば上の考察に帰着できる：
直線 P_1P_3, P_2P_4 の交点を P_5 とする.
同様に, Q_1Q_3, Q_2Q_4 の交点を Q_5 とする.
４点のうち, 最初の 2 点 P_1, P_2 で定まる直線を Q_1, Q_2 で定まる直線に写し,
残りの 3 点 P_3, P_4, P_5 を 3 点 Q_3, Q_4, Q_5 に写すような射影変換が
ただ一つ定まることが上の考察より分かっている.
このとき, 直線 P_1, P_5, P_3 は直線 Q_1, Q_5, Q_3 に,
直線 P_2, P_5, P_4 は直線 Q_2, Q_5, Q_4 に, 写っているはずである.
従って 点 P_1, P_2 はそれぞれ点 Q_1, Q_2 に写っているはずである.
一意性も同様.



Q　1 次元射影直線の射影変換は 3 点の行き先を指定すればただ一つ定まる.
このような変換は次の章で複素射影直線の場合に複比を用いて与えられる.

一般に n 次元射影空間の射影変換は一般の位置にある $n+2$ 個の点の
行き先を指定すればただ一つに定まることが知られている.

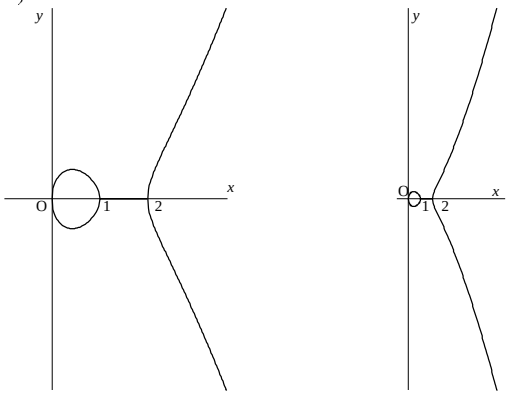
第２章　代数幾何入門



楕円曲線のお話

この頃暗号の世界で流行っているもの.
楕円とは全く異なり, $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ の形の方程式で定義される.

例　$y^2 = x(x-1)(x-a)$　$(a > 1)$ と因数分解される場合
(図は $a = 2$)

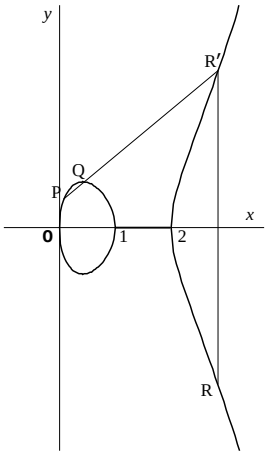


$x \to \infty$ のとき分枝は $y \sim x^{3/2}$ で増大し, 無限遠点 $(0, \pm 1, 0)$ に向かう.

楕円曲線の群構造

楕円曲線 E 上の点の全体は可換群を成す：
曲線上の点 $\mathrm{P} \in E$ と $\mathrm{Q} \in E$ を通る直線が再び曲線 E と交わる点を R' とするとき, R' を x 軸に関して線対称に写した点 R を $\mathrm{R} = \mathrm{P} + \mathrm{Q}$ と定める.
具体的には, $\mathrm{P} = (x_1, y_1)$, $\mathrm{Q} = (x_2, y_2)$, $\mathrm{R} = \mathrm{P} + \mathrm{Q} = (x_3, y_3)$ と置くとき,

$$x_3 = \lambda^2 - a - x_1 - x_2, \quad y_3 = -\lambda x_3 - \nu,$$
$$\text{ここに} \quad \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$
$$\nu = y_1 - \lambda x_1 = y_2 - \lambda x_2$$

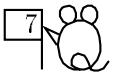


$\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ のときは, P, Q を通る直線を接線と解釈して $\mathrm{R} = 2\mathrm{P}$ は

$$x_3 = \lambda^2 - a - 2x_1, \quad y_3 = -\lambda x_3 - \nu,$$
$$\text{ここに} \quad \lambda = \frac{3x_1^2 + 2ax_1 + b}{2y_1},$$
$$\nu = y_1 - \lambda x_1$$

無限遠点 $\mathcal{O} = (0, 1, 0)$ は単位元となる.

証明 $\mathrm{P}(x_1, y_1), \mathrm{Q}(x_2, y_2)$ を通る直線の方程式は



$$y = \lambda x + \nu, \quad \text{ここに} \quad \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ \nu = y_1 - \lambda x_1 = y_2 - \lambda x_2$$

よって $\mathrm{R}' = (x_3, -y_3)$ とすれば, x_3 は

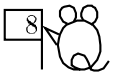
$$x^3 + ax^2 + bx + c - (\lambda x + \nu)^2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

の第 3 の根 x_3 である.
根と係数の関係より $x_1 + x_2 + x_3 = -a + \lambda^2$
$\therefore \quad x_3 = \lambda^2 - a - x_1 - x_2$

$\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ のとき,
一般に曲線 $f(x, y) = 0$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_1, y_1)(x - x_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_1, y_1)(y - y_1) = 0$$

(接線とは一次近似なり！)
代数ではこれを定義式とする. f は多項式なので重根条件から導ける.



今は $f(x,y)=x^3+ax^2+bx+c-y^2$ なので,
P を通る E の接線は

$$(3x_1^2+2ax_1+b)(x-x_1)-2y_1(y-y_1)=0$$

つまり $\lambda=\dfrac{3x_1^2+2ax_1+b}{2y_1}$, $\nu=y_1-\lambda x_1$
よってこれが E と再び交わる点 $(x_3,-y_3)$ は上と同様, $x_3=\lambda^2-a-2x_1$.

別解 P = Q のときの公式から極限に行けば得られる：

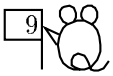
$$y_1^2=x_1^3+ax_1^2+bx_1+c,\quad y_2^2=x_2^3+ax_2^2+bx_2+c$$

より,

$$\begin{aligned}\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}&=\frac{y_2^2-y_1^2}{(y_2+y_1)(x_2-x_1)}=\frac{(x_2^3+ax_2^2+bx_2+c)-(x_1^3+ax_1^2+bx_1+c)}{(y_2+y_1)(x_2-x_1)}\\&=\frac{1}{y_2+y_1}\left(\frac{x_2^3-x_1^3}{x_2-x_1}+a\frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}+b\right)\\&=\frac{1}{y_2+y_1}\{x_1^2+x_1x_2+x_2^2+a(x_1+x_2)+b\}\end{aligned}$$

から $x_2\to x_1$ とすれば, $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\to\dfrac{3x_1^2+2ax_1+b}{2y_1}$.

群の公理



楕円曲線 E の無限遠点はただ一点 $\mathcal{O}=(0,1,0)$.

これを代数的に厳密に導くには, 同次座標を用いて

$$Y^2Z = X^3 + aX^2Z + bXZ^2 + cZ^3$$

としておいて $Z=0$ と置けば, $X^3=0$, つまり $X=0$,
よって解は $(0,Y,0)$ のみ. $Y\neq 0$ で割れば $(0,1,0)$ となる.

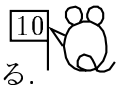
$\mathrm{P}+(-\mathrm{P})=\mathcal{O}$ $\iff$ P を通り, y 軸に平行な直線が $\mathcal{O}$ を通る.

以上の演算の定義で E が群となることの証明：

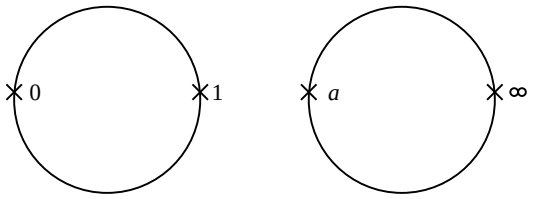
◎単位元 $\mathcal{O}$ の存在, 逆元 $-\mathrm{P}$ の存在, は明らか
◎演算が可換なことも明らか.
◎結合律 $(\mathrm{P}+\mathrm{Q})+\mathrm{R}=\mathrm{P}+(\mathrm{Q}+\mathrm{R})$ の証明は自明でない.
直接計算してもできる. 幾何学的にも示せる.

問題 4 上の演算に対し, 結合律を証明せよ.
座標で計算するときは Mathematica か Risa/Asir を用いてよい.

複素数で見た楕円曲線

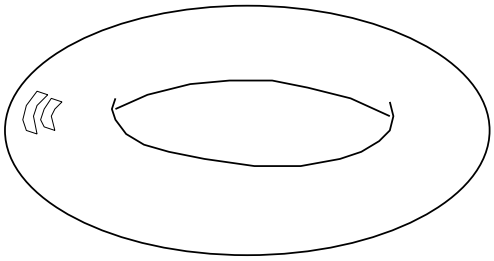


無限遠点 $(0,\pm1,0)$ は実は一つの点なので, 曲線はここで繋がっている.
この点を有限の位置に持って来ると, 次のような形となる：



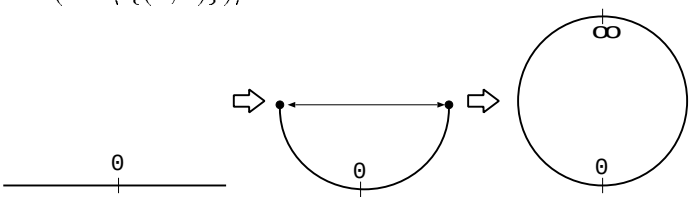

厳密にいうと,
線型の射影変換では
この形にはできない.
4 次の曲線
$y^2=(x^2-1)(4-x^2)$
などで実現できる.

これだけじゃあ何だか分からないが, x, y を複素数で動かすと,
上は次のような曲面の断面であることが分かる：

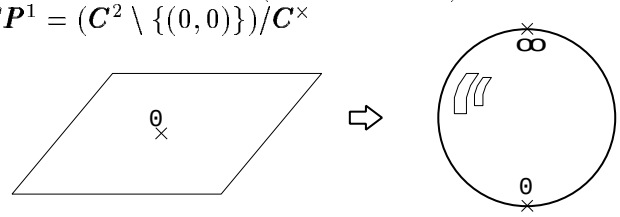


実数と複素数

実一次元のアフィン空間は直線
無限遠点を追加すると実射影直線になる $\iff$ 円周と同じ構造
$\boldsymbol{P}^1 := (\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\})/\boldsymbol{R}^\times$

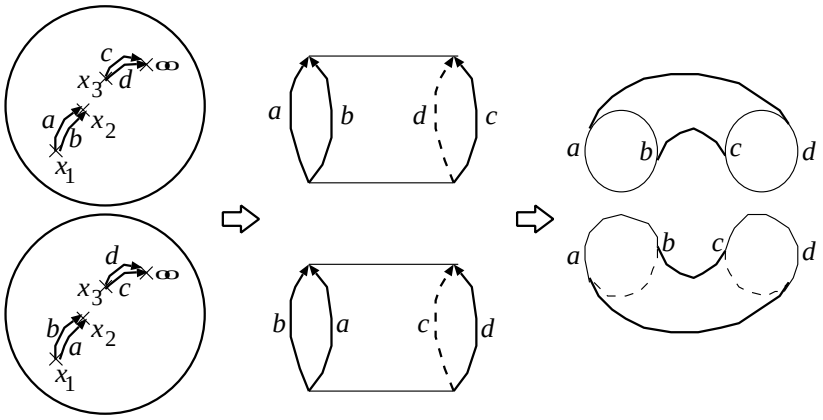


複素一次元の空間は平面 (いわゆる複素平面)
無限遠点を追加すると複素射影直線になる
$\iff$ 球面と同じ構造 (Riemann 球面)
$\boldsymbol{CP}^1 = (\boldsymbol{C}^2 \setminus \{(0,0)\})/\boldsymbol{C}^\times$

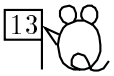


複素楕円曲線 $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ は
x を Riemann 球面で動かし,
$y = \pm\sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}$ の
グラフとして実現できる.
$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の三根 x_1, x_2, x_3, および無限遠点では
y の値が一つしかない.

そこで, Riemann 球面を二枚用意し, これらの点で切り開いて貼り合わせる：

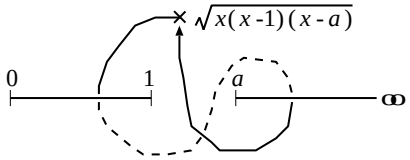


Riemann 球面の分岐被覆としての Riemann 面

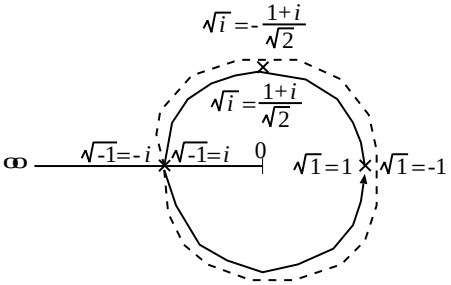


上の曲面は, $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ の“高さを無視した”グラフ.
これは多価函数 $\sqrt{z^3 + az^2 + bz + c}$ がその上で一価函数となるように
定義域を修正したものとも思える.

$\Longrightarrow$ $\sqrt{z^3 + az^2 + bz + c}$ の Riemann 面

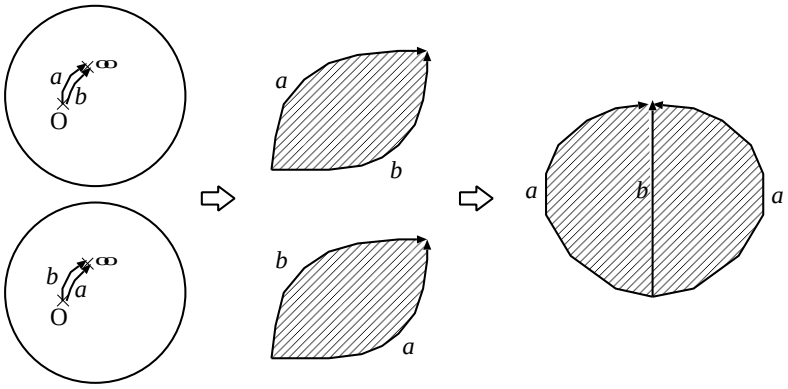


練習として, $y^2 = x$ の場合, i.e. $\sqrt{z}$ の Riemann 面をやっておく：



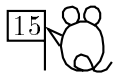
$y = \sqrt{x}$ は複素平面で
$x = 0$ を一周すると
別の分枝になる.

$\Longrightarrow$ 正の実軸に沿って無限遠点まで鋏を入れたものを二枚用意し,
一方の紙の切り口の上側と他方の紙の下側を貼り付けると,
分枝の変化が表現できる ($\sqrt{z}$ の Riemann 面):

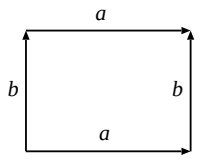


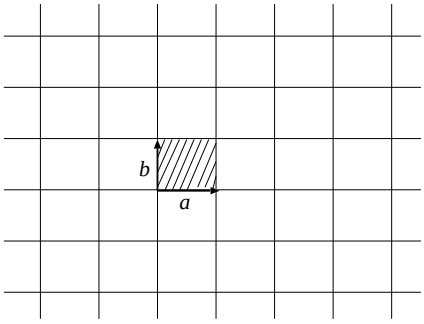
この場合は貼り合わせの結果は, 元の Riemann 球面と同じものに戻る.

最も簡単なトーラスの作り方



四角い紙を用意し, 左右の辺を同一視すると輪になる.
更に上下の辺を同一視するとトーラスができる.
これは, 平面で (x, y) と $(x + a, y)$ および, (x, y) と $(x, y + b)$ を
同一視するのと同等：





単に同一視するので, 無理に紙をひねって貼り合わせる必要はない.
平面上を移動していって格子に達したら一瞬でワープし
一つ手前の格子に戻ってしまうような世界を想像すればよい.

数学ではトーラスを $\boldsymbol{R}^2/L$ で定義する.
ここに $L=\{(am,bn)\mid m,n\in\boldsymbol{Z}\}$ は
$\boldsymbol{R}^2$ の離散部分加群で, 標準格子 (standard lattice) と呼ばれる.

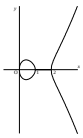
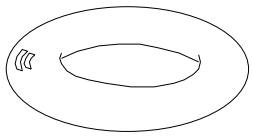
ベクトル $a\boldsymbol{e}_1$, $b\boldsymbol{e}_2$ は一次独立な一般のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ で取り替えてもよい:

一般の格子: $L=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{Z}\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$で張られる$\boldsymbol{R}^2$の部分加群

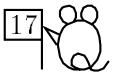
$\boldsymbol{R}^2$ を複素平面 $\boldsymbol{C}$ だと思うと, ω_1, ω_2 を $\boldsymbol{R}$ 上一次独立な二つの複素数として,

$$T=\boldsymbol{C}/L,\quad L=\boldsymbol{Z}\omega_1+\boldsymbol{Z}\omega_2$$

この構造からは, トーラスが加群となっていることが明らか:
T の演算 $+$ は単に $\boldsymbol{R}^2$, あるいは $\boldsymbol{C}$ の演算 $+$ から
商群に自然に誘導されたもの.


$y^2=x^3+ax^2+bx+c$ と

$\boldsymbol{C}/L$ は
ほんとに同じもの?

楕円函数



トーラス T と楕円曲線 E の同等性は, 楕円函数というもので
両者が対応することから分かる.

$\boldsymbol{C}/(\boldsymbol{Z}\omega_1 + \boldsymbol{Z}\omega_2)$ の上に函数 $f(z)$ が存在
$\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{C}$ 上の函数 $f(z)$ で, 二重周期性：
$f(z + m\omega_1 + n\omega_2) = f(z) \quad \forall\, m, n \in \boldsymbol{Z}$ を持つものが存在

このようなものを作れと言われたら, 例えば

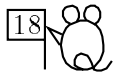
$$\sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} \qquad (*)$$

なんていうのをすぐ考え付くだろう.
ただし, これでは収束しない (2 次元的和なので, 収束には冪 > 2 が必要).
普通は $z = 0$ での Laurent 展開の定数項が 0 となるように定数を調節した

$$\wp(z) := \frac{1}{z^2} + \sum_{(m,n)\in \boldsymbol{Z}^2 \setminus (0,0)} \left\{ \frac{1}{(z - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2} \right\} \qquad (**)$$

が用いられる (Weierstrass の $\wp$ 函数).

ここで



$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(z-m\omega_1-n\omega_2)^2}-\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\\
&=\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\frac{1}{\{1-z/(m\omega_1+n\omega_2)\}^2}-\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\\
&=\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\Big(\frac{m\omega_1+n\omega_2}{1-z/(m\omega_1+n\omega_2)}\Big)'-\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\\
&=\frac{1}{m\omega_1+n\omega_2}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(m\omega_1+n\omega_2)^k}\Big)'-\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\\
&=\frac{1}{m\omega_1+n\omega_2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{kz^{k-1}}{(m\omega_1+n\omega_2)^k}-\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)z^k}{(m\omega_1+n\omega_2)^{k+2}}-\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k+1)z^k}{(m\omega_1+n\omega_2)^{k+2}}
\end{aligned}
$$

これを m,n について加えるとき, 奇数次の項は対称性により消えるので

$$
\begin{aligned}
\therefore\ \wp(z)&=\frac{1}{z^2}+\sum_{(m,n)\in\boldsymbol{Z}^2\setminus(0,0)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)z^{2k}}{(m\omega_1+n\omega_2)^{2k+2}}\\
&=\frac{1}{z^2}+\sum_{k=1}^{\infty}(2k+1)G_{k+1}z^{2k}
\end{aligned}
$$

ここに $G_k:=\displaystyle\sum_{(m,n)\in\boldsymbol{Z}^2\setminus(0,0)}\frac{1}{(m\omega_1+n\omega_2)^{2k}},\quad k=2,3,\ldots$

$\mathbb{Q}$ m,n を固定したとき, z の冪級数は $\left|\dfrac{z}{m\omega_1+n\omega_2}\right|<1$ でしか収束しない.
そこで上の計算は次のように二通りに利用する：
1) $(**)$ が任意の z について収束することを示すには, 与えられた z に対し, $\left|\dfrac{z}{m\omega_1+n\omega_2}\right|<1$ となるような十分大きな m,n についてのみ上の変形を行えばよい.
2) 最後の等式においては, 右辺は z の冪級数なので, z が十分小さいところ, e.g. $|z|<\min\limits_{0\le t\le 1}|t\omega_1+(1-t)\omega_2|$ で考えれば, すべての項に意味が付く.

これから, 以下の諸公式が導ける：

$$\wp'(z)=-2\sum_{m,n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-m\omega_1-n\omega_2)^3}$$
$$\wp'(z+m\omega_1+n\omega_2)=\wp'(z),$$
$$\wp(-z)=\wp(z),\quad \wp'(-z)=-\wp'(z),$$
$$\wp'(\frac{\omega_1}{2})=\wp'(\frac{\omega_2}{2})=\wp'(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})=0,$$
$$\wp'(z)^2=4\wp(z)^3-g_2\wp(z)-g_3,\quad \text{ここに}\ \ g_2=60G_2,\ g_3=140G_3$$

$\mathbb{Q}$ 最初の式は $(*)$ を形式的に微分したものだが, 厳密には, 収束する方の $(**)$ の微分を経由して示す.
$(**)$ は $(*)$ を定数だけ調節したものだから, 微分の結果は同じはず！
最後の等式の証明は, $z=0$ で極と定数項が一致することを見れば十分.
($\Longleftarrow$ Liouville の定理：全平面で有界正則な函数は定数に限る.)

これより,

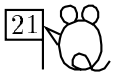
$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{C}/(\boldsymbol{Z}\omega_1+\boldsymbol{Z}\omega_2) & \xrightarrow{\sim} & E:=\{(x,y)\in \boldsymbol{CP}^2 \mid y^2=4x^3-g_2x-g_3\} \\ \cup & & \cup \\ z & \mapsto & (\wp(z),\wp'(z)) \end{array}$$

という対応が定まる.
$\boldsymbol{C}$ の加法が $\wp(z)$ の加法定理を通して楕円曲線の演算に対応.
(楕円函数 $\wp(z)$ の加法定理については数学辞典等を参照.)

$\mathbb{Q}$ 上の $\wp(z)$ の微分方程式から $\wp(z)$ を求積すると

$$\int_0^z \frac{d\wp}{\sqrt{4\wp^3-g_2\wp-g_3}}=z$$

つまり, $\wp(z)$ は平方根の中が 3 次の無理函数の不定積分の逆函数.
cf. 平方根の中が 2 次の無理函数の不定積分の逆函数として
　周期を一つ持った三角函数が得られる.
平方根の中が 3 次や 4 次の無理函数の積分は楕円の弧長を計算するとき
現われるので, 楕円積分と呼ばれる.
その逆函数が 2 重周期性を持つことに気付いたのが 19 世紀初頭の大発見で,
その後の数学のいろいろな発展に繋がった.



問題 5 下記のような特別な場合の方程式について,
実でのグラフ, 複素形 (Riemann 面), 加群の構造が
それぞれどうなるか調べよ.

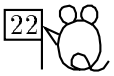
勇気の有る人は, 格子による商群としての表現も調べて見よ.

1) $y^2 = x(x-1)^2$ (右辺が二重根を持つ).

2) $y^2 = x^3$ (右辺が三重根を持つ).

3) $y^2 = x(x^2+1)$ (右辺が一実根のみを持つ).

楕円曲線と楕円函数の歴史 (暫定版)



二重周期性を持つ楕円函数は, 楕円の弧長を求めるとき出て来る積分
$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx$ の逆函数として発見された

c.f. 円の弧長に関連する積分 $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ の逆函数として
周期性を持つ函数 (i.e. 円周上の一価函数) $\sin x$, $\cos x$ が得られる.

楕円曲線という名前は, それが楕円函数の自然な定義域なので付けられたもの. 楕円の弧長の計算が難しいことは既に 17 世紀中ごろには認識されていた.

☆ Bachet 1621, $y^2 = x^3 + c$ に対し 2 倍公式を発見し,
この不定方程式の一つの有理解から他の有理解を作るのに利用

☆ Euler 18 世紀, 楕円積分の間の種々の関係式 (加法定理など) を導く

☆ Gauss 1800 年前後, レムニスケートの弧長を調べるため, 積分
$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx$ を研究し, 逆函数が二重周期性を持つことを発見. 楕円函数の殆どの結果を得たが発表せず, 遺稿として残された.

☆ Abel 1820 年代, $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}}dx$ 型の積分の逆函数として二重周期函数が得られることを発見. これを一般化した Abel 積分の理論を構築

☆ Jacobi 1820 ~ 30 年代, ϑ 函数, $\mathrm{sn}(x)$ (sinusoidal), $\mathrm{cn}(x)$ (cnoidal) 函数に当たるものを導入し, Abel の後を受けて楕円函数論の基礎付けをした

☆ Riemann 1850 年代, Riemann 面の概念を導入し, Abel 多様体論の萌芽を与えた

☆ Weierstrass 1840 ~ 60 年代, $\wp$ 函数を導入し, 解析的理論を構築

以上は複素数体 $\boldsymbol{C}$ 上の話だが, 有限体上の楕円曲線の加法群の構造は
1980 年代中頃から楕円曲線暗号への応用で脚光を浴びるようになった.