

幾何入門 第3回



情報科学科 金子 晃

А л е к с е й К А Н Е Н К О

kanenko@is.ocha.ac.jp

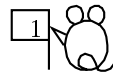
この講義のホームページ:

<http://www.atom.is.ocha.ac.jp/~kanenko/KOUGI/Geo/geo.html>

この講義のホームディレクトリ:

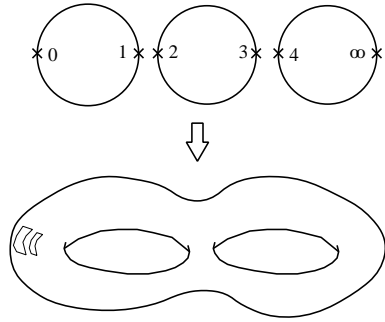
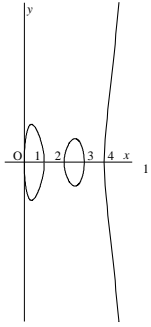
edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo

超楕円曲線



楕円曲線の一般化で,
 $y^2 = x^{2g+1} + \sum_{k=0}^{2g} a_k x^k = 0$ という方程式で定義される.

例 $y^2 = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ ($g=2$)

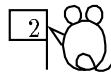


一般の g の値に対しては, g 個の穴を持つドーナツとなる.

(g 人乗りの浮袋)

g を曲線の種数 (genus) と呼ぶ (示性数と訳す人も居る).

平面代数曲線論



一般に $f(x, y)$ を x, y の n 次多項式とするとき,

$$f(x, y) = 0$$

を満たす点 (x, y) の全体を f により定まる n 次のアフィン代数曲線という.

同次座標にして無限遠点も加えたものを射影代数曲線と呼ぶ.

$$F(X, Y, Z) := Z^n f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right) = 0$$

例 最も一般的な形の楕円曲線

$$y^2 + a_1xy + a_3y = x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6$$

同次座標で

$$Y^2Z + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3$$

いずれも一部の項を右辺に移項してあるが, 本質的ではない.

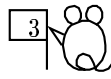
☆ 3 次の代数曲線は双有理変換 (\iff 座標が有理関数で表されるような変換) で

上の形の楕円曲線のどれかに帰着される.

係数体の標数 $\neq 2, 3$ のときは, 更に Weierstrass の標準形

$$y^2 = x^3 + ax + b$$
 に帰着される.

特異点・非特異点



アフィン代数曲線 $f(x, y) = 0$ 上の点 (x, y) が非特異 (単純点)

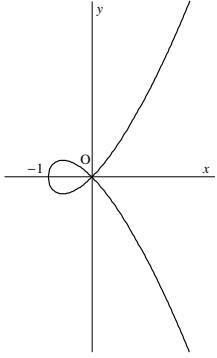
$\iff \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \neq (0, 0)$ なること \iff この点で曲線の接線が確定

\iff 陰関数定理により一変数につき解ける \iff 一変数函数のグラフ

特異点 \iff 曲線の方程式のその点での Taylor 展開が r 次 ($r \geq 2$) から始まる
(r : 特異点の重複度)

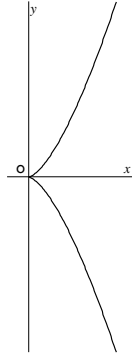
通常特異点の例:

結節点 (node) $y^2 = x^2(x+1)$ の原点
二つの異なる接線を持つ



通常でない特異点の例:

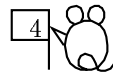
尖点 (cusp) $y^2 - x^3 = 0$ の原点
接線が二重になっている



一般に特異点は曲線が重複して通過するものとみなされる

\iff 重複度 (multiplicity) が 2 以上

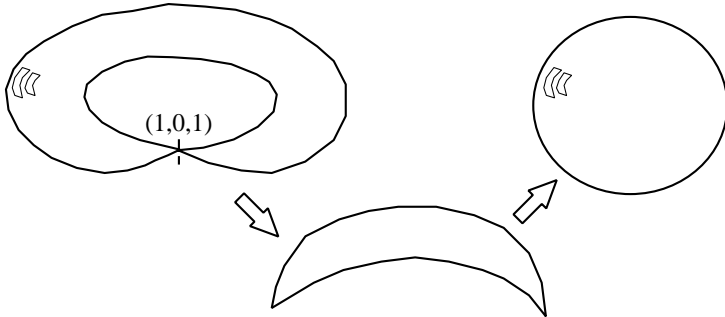
特異点があると種数が下がる：



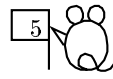
例 $y^2 = x(x-1)^2$ は、双有理変換

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = \frac{y}{x-1} \end{cases} \iff \begin{cases} x = X, \\ y = (X-1)Y \end{cases} \quad \text{により } Y^2 = X \text{ へ, 更に}$$
$$\begin{cases} \xi = X - Y^2, \\ \eta = Y \end{cases} \iff \begin{cases} X = \xi + \eta^2, \\ Y = \eta \end{cases} \quad \text{により } \xi = 0 \text{ へ変換される.}$$

$\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbf{P}^2 \mid \xi = 0\} \cong \mathbf{P}^1$ に注意



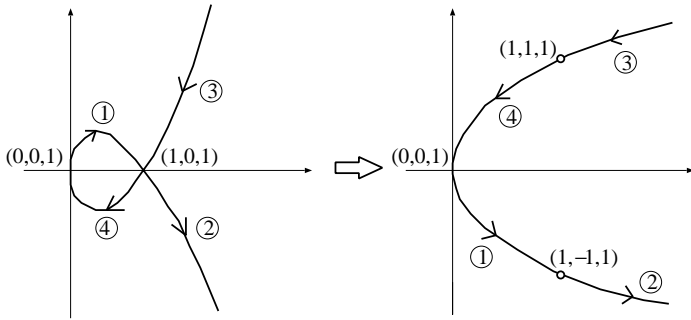
ここで用いた変換 $(x, y) \mapsto (X, Y) = (x, \frac{y}{x-1})$ は,



$(1, 0, 1)$ において, \mathbf{P}^2 の変換としては $\frac{0}{0}$ 型となり, 不定.

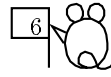
\Rightarrow 双有理変換には, 定義されない点がある.

曲線 $y^2 = x(x-1)^2$ 上では $Y = \frac{y}{x-1} = \pm\sqrt{x}$ と高々二つの値に確定する
(ここで重なった点が二つに分離する)



これは特異点解消の例ともなっている.

平面代数曲線論の主な公式



Bézout の定理 m 次の平面代数曲線と n 次の代数曲線の交点は二つの方程式が共通の既約因子を持たなければ代数的閉体上で数えると重複度も込めて mn 個.
(\iff 2 元連立高階方程式の解の個数)

※ 共通因子を持つと, 共有点は無限個になっちゃう. これは交点とは言わない.

Plücker の公式 n 次平面代数曲線 C が特異点として高々二重点しか持たないとき, 結節点を d 個, 尖点を k 個とすれば, C の双対曲線 C' の次数 m ($= C$ の級数) は

$$m = n(n-1) - 2d - 3k$$

また, C の種数は

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - k$$

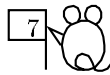
🐛 元来の Plücker の公式を書くにはもっと進んだ概念が必要なので, ここでは略す.

代数幾何学は, 重複度の概念を代数を用いて厳密に定義することにより, これらの公式を例外無く成立させるのを目標に出発した!

あいまいな幾何学的概念 \implies 可換代数の言葉で精密化

付録 Pascal の定理の一般化 (Bézout の定理の系)

C_1, C_2 は異なる n 次曲線で n^2 個の交点を持ち,
そのうちの mn 個が m 次既約曲線 E の上に載っているとす。
このとき、残りの $n(n-m)$ 個を通る $n-m$ 次曲線が存在する。



Pascal の定理では $n=3$ で C_1, C_2 は 6 角形の辺を一つ置きに取った三直線,
 E は 2 次曲線とすればよい。

系の証明 C_1 の方程式を $F_1=0$, C_2 の方程式を $F_2=0$,
 E の方程式を $G=0$ とする。

P を $(C_1 \cap C_2) \cap E$ に含まれない E の点とすると,
 F_1, F_2 のどちらかはそこで 0 でない。例えば $F_2(P) \neq 0$ 。

このとき $\lambda = -G(P)/F_2(P)$ と置けば

方程式 $F_1 + \lambda F_2 = 0$ は n 次式で、

少なくとも $nm+1$ 個の零点 $\{(C_1 \cap C_2) \cap E\} \cup \{P\}$ を E と共有する。

Bézout の定理によれば、これは両者が既約成分を共有するときしか有り得ない。

E は既約だから、結局 $F_1 + \lambda F_2 = G \cdot H$ と因数分解され、ここに H は $n-m$ 次式。

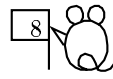
$H=0$ が求める曲線である。

何者、左辺は n^2 個の点 $C_1 \cap C_2$ で零となるが、

右辺の因子 G はそのうちの mn 個でしか 0 とならないので、

因子 H が残りの $n(n-m)$ 点で零とならねばならない。

数論的代数幾何



この副産物として、実数体 \mathbf{R} , 複素数体 \mathbf{C} を有限体 F_q や代数体などの一般の体で置き換えても幾何学ができることになり、整数論に応用されて目覚ましい成果を挙げた。 \Rightarrow 例：Fermat 予想の解決など

近年では、暗号や誤り訂正符号の理論にこれら有限体上の代数幾何学が本質的な役割を果たしている。

例 三浦の C_a^b 曲線。 $\text{GCD}(a, b) = 1$ なる a, b に対し、次の方程式で定まるもの：

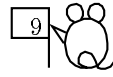
$$y^a = x^b + \sum_{\substack{0 \leq ai + bj \leq ab \\ i, j > 0}} a_{ij} x^i y^j$$

(x に a 次, y に b 次という重みをつけて測った重み付き次数 ab 以下の項の全体) 無限遠点では $Z^{b-a} = X^b$ 型の一般化 cusp を持つ。

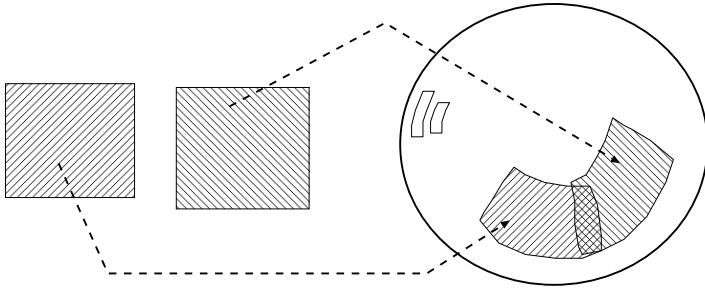
それ以外では非特異と仮定すると $g = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$ 。

この曲線の良いクラスを選び出して用いると、素晴らしい符号ができる。暗号にも使えそうだと、研究されている。

第3章 多様体 (manifold)



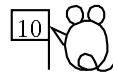
ユークリッド空間の開集合を張り合わせて真空中に幾何図形を作る
cf. 新聞紙を貼り合わせて運動会の大玉を作る



糊代 (ノリシロ) に何を使うかで、できあがる図形のカテゴリーが決まる：

- ☆ 繋ぎ目を連続関数で貼り合わせる \implies 位相多様体
- ☆ 繋ぎ目を区分一次関数で貼り合わせる \implies PL 多様体 (多面体)
- ☆ 繋ぎ目を C^∞ 級関数で貼り合わせる \implies C^∞ 多様体
- ☆ 繋ぎ目を実解析関数で貼り合わせる \implies 実解析多様体
- ☆ 複素ユークリッド空間の開集合を正則関数で貼り合わせる \implies 複素多様体
- (☆ 繋ぎ目を有理関数で貼り合わせる \implies 代数多様体)

位相多様体



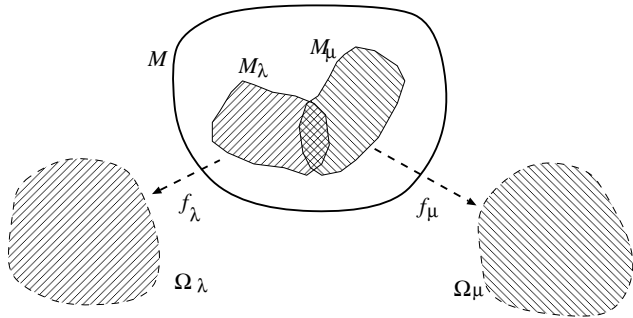
Poincaré が導入した (元々は連立常微分方程式を研究するため)

n 次元位相多様体の定義: Hausdorff な位相空間 M が位相多様体であるとは,

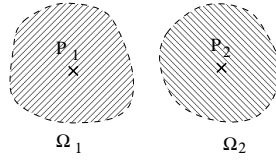
$M = \bigcup M_\lambda$, 各 $M_\lambda \subset M$ は開集合で,

開集合 $\Omega_\lambda \subset \mathbf{R}^n$ と位相同型写像 $f_\lambda: M_\lambda \rightarrow \Omega_\lambda$ が存在すること.

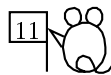
i.e. 一言でいうと, 局所ユークリッド的な位相空間のこと.



※ Hausdorff の分離公理: 任意の 2 点が, それぞれのある近傍で分離できること



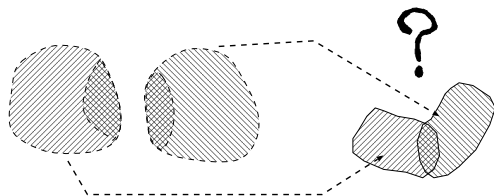
多様体を作る立場からは、 M が始めから存在すると仮定するのは強すぎるので、次のような定義にする：



開集合 $\Omega_\lambda \subset \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \Lambda$ の族, および
各ペア $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して, 開部分集合 $\Omega_{\lambda\mu} \subset \Omega_\lambda$, $\Omega_{\mu\lambda} \subset \Omega_\mu$ と
それらの間の位相同型写像 $f_{\lambda\mu} : \Omega_{\lambda\mu} \rightarrow \Omega_{\mu\lambda}$, $f_{\mu\lambda} = f_{\lambda\mu}^{-1}$ が
与えられているとき,

$$M := \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda / \sim$$

で, 位相多様体ができる.
ここに \sim は $f_{\lambda\mu}$ で対応する Ω_λ の点と Ω_μ の点を同一視することを表す.



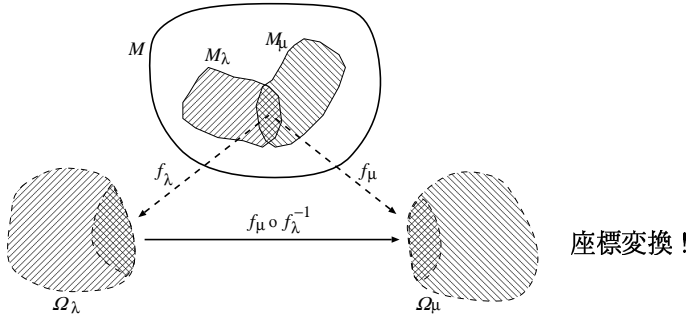
計算機には局所的な貼り合わせ情報から全体像を把握するのは非常に難しい?
Cf. グラフのデータからグラフの全体像を探るのも大変困難.

M_λ と $f_\lambda : M_\lambda \rightarrow \Omega_\lambda$ の対を座標近傍, または地図 (chart) $\{M_\lambda, \lambda \in A\}$ を地図帳 (atlas) と呼ぶ.

多様体の方が \mathbf{R}^3 の曲面として予め与えられている場合は M_λ と Ω_λ の差ははっきりしているが, 抽象的な多様体では, 違いが判然としない.

$M = \bigcup M_\lambda$ が C^∞ 多様体 (可微分多様体 differentiable manifold, あるいは, 滑らかな多様体 smooth manifold)

\Leftrightarrow 各ペア λ, μ について $f_{\lambda\mu} := f_\mu \circ f_\lambda^{-1} : \Omega_{\lambda\mu} \rightarrow \Omega_{\mu\lambda}$ が C^∞ 級写像

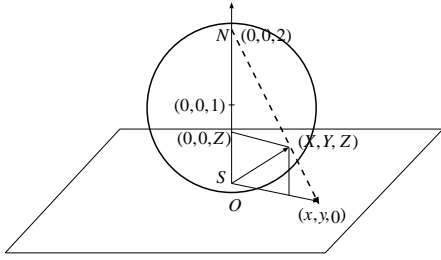


こうして, 多様体上で局所座標を用いて微積ができるようになる!

例 1 球面 $\{(X, Y, Z) \mid X^2 + Y^2 + (Z - 1)^2 = 1\}$

球面全体はユークリッド平面と一対一には対応しないが、北極を除けば立体射影でユークリッド平面と対応付けられる：

$$X = \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \quad Y = \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \quad Z = \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4}$$



計算： $(X, Y) = k(x, y)$ と置き、
 $k : 1 = 2 - Z : 2$, すなわち
 $2k - 1 = 1 - Z$ と
 $X^2 + Y^2 + (Z - 1)^2 = 1$ から
 $k^2(x^2 + y^2) + (2k - 1)^2 = 1$
 $k^2(x^2 + y^2) + 4k^2 = 4k$
 $\therefore k = \frac{4}{x^2 + y^2 + 4}$

逆対応は $2k = 2 - Z$ より $x = \frac{2X}{2 - Z}, y = \frac{2Y}{2 - Z}$

同様にして北極に紙を貼り付け南極から射影すれば、

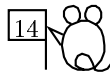
上で $x \mapsto \xi, y \mapsto \eta, Z \mapsto 2 - Z$ としたものができる： $\xi = \frac{2X}{Z}, \eta = \frac{2Y}{Z}$

両者を合わせれば球面全体が実現できる：

$\Omega_1 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\} \cong \mathbf{R}^2, \quad \Omega_2 := \{(\xi, \eta) \mid \xi, \eta \in \mathbf{R}\} \cong \mathbf{R}^2,$
 $\Omega_{12} := \{(x, y) \in \Omega_1 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}, \quad \Omega_{21} := \{(\xi, \eta) \in \Omega_2 \mid (\xi, \eta) \neq (0, 0)\}$ として、
 $(x, y) \cong (\xi, \eta) \iff \xi = \left(\frac{2}{Z} - 1\right)x = \left(\frac{x^2 + y^2 + 4}{x^2 + y^2} - 1\right)x = \frac{4x}{x^2 + y^2}, \eta = \frac{4y}{x^2 + y^2}$

☞ 両極以外は重なり合っているので、ずいぶん無駄な座標だ！
 南半球と北半球を貼り合わせるような作り方の方が合理的だが、
 可微分多様体の定義では、糊代に幅が必要。
 従って上の座標平面を $x^2 + y^2 < 4 + \varepsilon, \xi^2 + \eta^2 < 4 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) くらいに
 切り落とせばよい。

例 2 射影平面 $(\mathbf{R}^3 \setminus \{0, 0, 0\})/\mathbf{R}^\times$



この座標近傍は,

$$M_1 = \{(X, Y, Z) \in \mathbf{P}^2 \mid Z \neq 0\},$$

$$M_2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbf{P}^2 \mid Y \neq 0\},$$

$$M_3 = \{(X, Y, Z) \in \mathbf{P}^2 \mid X \neq 0\}$$

において, 同次座標 (X, Y, Z) から, それぞれ

$$x = \frac{X}{Z}, \quad y = \frac{Y}{Z}; \quad \xi = \frac{X}{Y}, \quad \eta = \frac{Z}{Y}; \quad u = \frac{Y}{X}, \quad v = \frac{Z}{X} \text{ として作った}$$

三つのアフィン平面:

$$\Omega_1 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\} \cong \mathbf{R}^2,$$

$$\Omega_2 := \{(\xi, \eta) \mid \xi, \eta \in \mathbf{R}\} \cong \mathbf{R}^2,$$

$$\Omega_3 := \{(u, v) \mid u, v \in \mathbf{R}\} \cong \mathbf{R}^2,$$

重なり具合は, 例えば

$$M_{12} = \{(X, Y, Z) \in \mathbf{P}^2 \mid Y \neq 0, Z \neq 0\},$$

$$\Omega_{12} := \{(x, y) \in \Omega_1 \mid y \neq 0\}, \quad \Omega_{21} := \{(\xi, \eta) \in \Omega_2 \mid \eta \neq 0\} \text{ として,}$$

$$(x, y) \sim (\xi, \eta) \iff \xi = \frac{x}{y}, \eta = \frac{1}{y} \text{ あるいは } x = \frac{\xi}{\eta}, y = \frac{1}{\eta}$$

$$\text{同様に } M_{13} = \{(X, Y, Z) \in \mathbf{P}^2 \mid X \neq 0, Z \neq 0\},$$

$$\Omega_{13} := \{(x, y) \in \Omega_1 \mid x \neq 0\}, \quad \Omega_{31} := \{(u, v) \in \Omega_3 \mid v \neq 0\} \text{ として,}$$

$$(x, y) \sim (u, v) \iff u = \frac{y}{x}, v = \frac{1}{x} \text{ 等々}$$

以上の例はいずれも C^∞ 級よりはもっと滑らかなクラスの多様体に属する:

$M = \bigcup M_\lambda$ が実解析多様体 (C^ω 多様体)

\iff 各ペア λ, μ について $f_{\lambda\mu} : \Omega_{\lambda\mu} \rightarrow \Omega_{\mu\lambda}$ が実解析写像

(i.e. 局所的に Taylor 展開できるような関数で書ける写像)

cf. $M = \bigcup M_\lambda$ が複素多様体

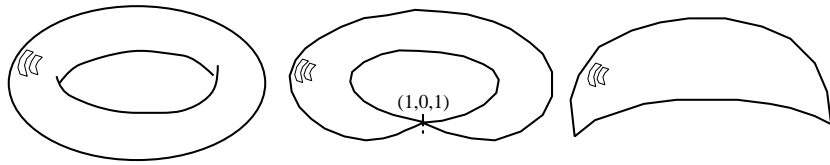
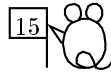
\iff 各 $\Omega_\lambda \subset \mathbf{C}^n$, かつ各 λ, μ について $f_{\lambda\mu} : \Omega_{\lambda\mu} \rightarrow \Omega_{\mu\lambda}$ が正則写像

こちらは Riemann 面の一般化. (\mathbf{P}^2 の方は複素数にしても意味を持つ!)

\mathbb{Q} 写像が C^∞ とか正則とかは, 座標で表したときの

成分関数がすべて C^∞ とか正則ということ.

多様体の滑らかさによる違い



左と右は位相多様体だが、真中は位相多様体ではない。
(点 $(1, 0, 1)$ の近傍がユークリッド平面と同相にならない.)

位相多様体としては右のものは球面と同じとみなせるが、 C^∞ 多様体ではない。

“ない”の意味はけっこう難しい。

\mathbb{R}^3 で角を持つ曲面として実現されているものを、
回りとの関係を変えずに滑らかにすることはできないが、
これと球面との一対一対応は付くので、それから局所座標を導入すれば
球面と同じになってしまう！

図形それ自身を抽象的に考えるか、
回りとの関係(埋め込み)を一緒に考えるか、 } は幾何学で常に問題となる。