

幾何入門 第4回



情報科学科 金子 晃

А л е к с е й К А Н Е Н К О

kanenko@is.ocha.ac.jp

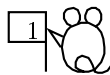
この講義のホームページ:

<http://www.atom.is.ocha.ac.jp/~kanenko/KOUGI/Geo/geo.html>

この講義のホームディレクトリ:

edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo

位相幾何入門



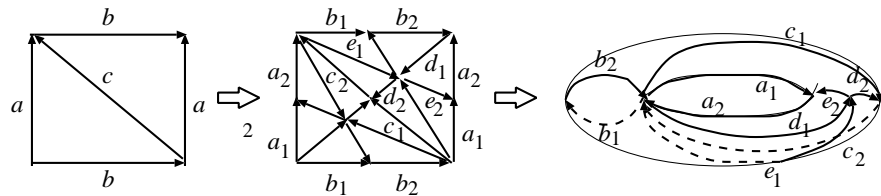
まず位相多様体から勉強する.

しかし, 一般の連続写像なんて例も無いし, 扱いにくいので,
できるだけ区分的一次写像で間に合わせる (Poincaré の位相多様体).

三角形分割 (triangulation)

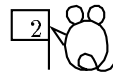
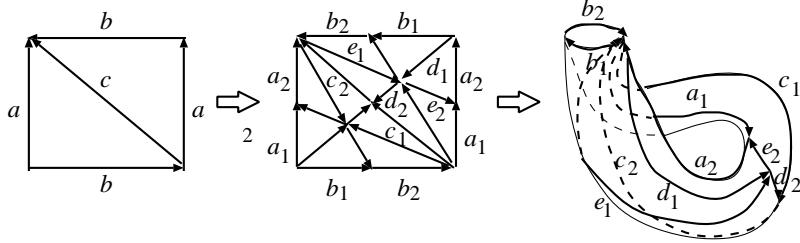
任意の 2 次元多様体は, 平面の三角形を継ぎ合わせるにより作れる
⇒ 三角形分割

例 1 トーラス:



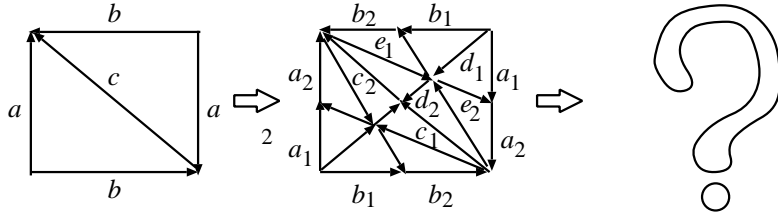
左はトーラスを作るときの紙の合わせ方の図に対角線を入れたもの.
辺の始点と終点が一致するのはいやだという場合は, 細分して三角形を
増やせばよい (図は重心細分).

例 2 Klein の壺 :

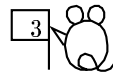


注意して完成図を描かないと, c_2, d_1, d_2 を三辺に持つ三角形のように, 三角形分割の要素三角形ではないものまで描いてしまう!

例 3 射影平面 :



二次元の閉じた位相多様体にはどんなものが有るか？
(分類問題)



向き付け可能とすると、穴の数 g 個の浮き袋で尽くされる。

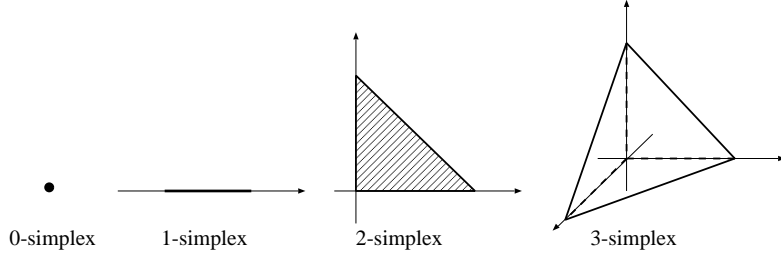
分類の手がかりは？ \implies 位相不変量 (同相写像で変わらない量)

二次位相不変量であるホモロジー群とホモトピー群についてまず学ぼう！

三角形分割された多様体の一般化 \implies 単体的複体 (simplicial complex)

高次元への一般化：ユークリッド空間の n -単体を継ぎ合わせて得られる図形

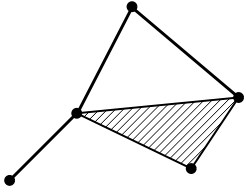
n -単体： $\{(x_1, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_j \leq 1, j = 1, \dots, n, x_1 + \dots + x_n \leq 1\}$



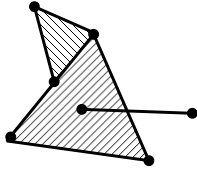
以下、簡単のため主に2次元の図形について説明する。

2次元単体的複体 $C = C_2 \cup C_1 \cup C_0$ とは,
 $C_2 = \{\alpha_j, j = 1, \dots, J\}$ 2-単体 (三角形) の集合,
 $C_1 = \{\mathbf{a}_k, k = 1, \dots, K\}$ 1-単体 (辺) の集合,
 $C_0 = \{P_l, l = 1, \dots, L\}$ 0-単体 (点) の集合
 が有り, 次の両立条件を満たすこと:

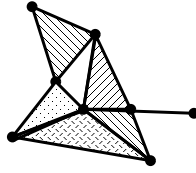
- 1) C_2 の元である三角形の辺は必ず C_1 に含まれる.
- 2) C_1 の元である辺の両端点は必ず C_0 に含まれる.
- 3) C の二つの元が交わりを持ては, 共通部分はまた C の要素でなければならない.



良い例

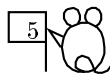


悪い例

悪い例を作り変えて
良くしたもの

※ 1次元単体的複体はグラフに他ならない!

ホモロジー群



鎖の群 (chain group)

$C_2 = \{ \sum_j c_j \alpha_j \mid c_j \in \mathbb{Z} \}$ 2-単体 α_j 達が生成する自由加群

$C_1 = \{ \sum_k c_k \mathbf{a}_k \mid c_k \in \mathbb{Z} \}$ 1-単体 \mathbf{a}_k 達が生成する自由加群

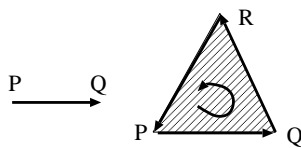
$C_0 = \{ \sum_l c_l P_l \mid c_l \in \mathbb{Z} \}$ 0-単体 P_l 達が生成する自由加群

境界作用素 (boundary operator) ∂

0-単体の境界は 0 とする. $\partial P = 0$

1-単体 \overrightarrow{PQ} の境界は $Q - P$ とする. $\partial \overrightarrow{PQ} = Q - P$

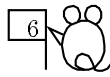
2-単体 $\triangle PQR$ の境界は $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RP}$ とする.



一般の鎖に対しては、この演算を加法と \mathbb{Z} 倍で自然に拡張する.

$\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}$ は加群の準同型となる.

i.e. $\partial(m\alpha + n\beta) = m\partial\alpha + n\partial\beta$



輪体 (cycle) の成す部分群

$\text{Ker } \partial$ の元を輪体と呼ぶ:

$$Z_k := \text{Ker } \{\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}\} = \{\alpha \in C_k \mid \partial\alpha = 0\}$$

境界輪体 (boundary) の成す部分群

$\text{Image } \partial$ の元を境界輪体と呼ぶ:

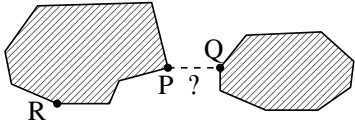
$$B_k := \text{Image } \{\partial : C_{k+1} \rightarrow C_k\} = \{\partial\alpha \mid \alpha \in C_{k+1}\}$$

☆ ∂ を二回続けて施すと 0 になる! $\implies B_k \subset Z_k$

この事実は, 単体 (simplex) については確かに成り立つので,
線型性により一般にも大丈夫.

k 次ホモロジー群 $H_k := Z_k/B_k$ 最も重要な位相不変量の一つ

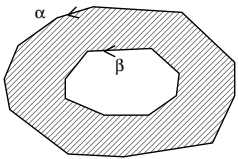
$k = 0$ に対するホモロジー群 H_0 は連結成分の個数を表す:



離れた成分に属する 2 点は
1 単体で橋を掛けられない!
 $H_0 \cong \mathbb{Z}^r$ r は連結成分の個数

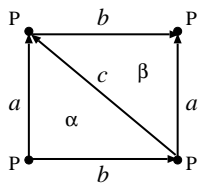
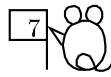
$k = 1$ のときのホモロジー群 H_1 の意義の説明:

多様体上に存在する閉曲線の中で, 多様体の内部で膜を張ることのできるものの割合はどのくらいか?



α だけだと張れない.
 $\alpha - \beta$ なら張れる.

トーラスのホモロジー群の計算



左図より

$$C_2 = \mathbf{Z}\alpha + \mathbf{Z}\beta \cong \mathbf{Z}^2, \quad C_1 = \mathbf{Z}\mathbf{a} + \mathbf{Z}\mathbf{b} + \mathbf{Z}\mathbf{c} \cong \mathbf{Z}^3, \quad C_0 = \mathbf{Z}P \cong \mathbf{Z}$$

$$\partial\alpha = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}, \quad \partial\beta = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$$

よって $Z_2 = \mathbf{Z}(\alpha + \beta) \cong \mathbf{Z}, \quad B_2 = 0$

$$\partial\mathbf{a} = P - P = 0, \quad \partial\mathbf{b} = P - P = 0, \quad \partial\mathbf{c} = P - P = 0$$

よって $Z_1 = C_1 = \mathbf{Z}\mathbf{a} + \mathbf{Z}\mathbf{b} + \mathbf{Z}\mathbf{c}, \quad B_1 = \mathbf{Z}(\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}) \cong \mathbf{Z}$

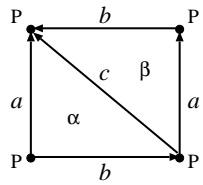
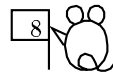
$$\partial P = 0, \quad \text{よって } Z_0 = C_0 = \mathbf{Z}P, \quad B_0 = 0$$

以上より、トーラスのホモロジー群は

$$H_2 = \mathbf{Z}, \quad H_1 = \mathbf{Z}^3/\mathbf{Z} \sim \mathbf{Z}^2, \quad H_0 = \mathbf{Z}$$

勇気の有る人は重心細分した方の図で計算し、一致すること確かめよ.

クラインの壺のホモロジー群の計算



左図より

$$C_2 = \mathbf{Z}\alpha + \mathbf{Z}\beta \cong \mathbf{Z}^2, \quad C_1 = \mathbf{Z}\mathbf{a} + \mathbf{Z}\mathbf{b} + \mathbf{Z}\mathbf{c} \cong \mathbf{Z}^3, \quad C_0 = \mathbf{Z}P \cong \mathbf{Z}$$

$$\partial\alpha = \mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a}, \quad \partial\beta = \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} \quad \text{よって} \quad Z_2 = 0, \quad B_2 = 0$$

$$\partial\mathbf{a} = P - P = 0, \quad \partial\mathbf{b} = P - P = 0, \quad \partial\mathbf{c} = P - P = 0$$

$$\text{よって} \quad Z_1 = C_1 = \mathbf{Z}\mathbf{a} + \mathbf{Z}\mathbf{b} + \mathbf{Z}\mathbf{c}, \quad B_1 = \mathbf{Z}(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) + 2\mathbf{Z}\mathbf{b} \cong \mathbf{Z} \oplus 2\mathbf{Z}$$

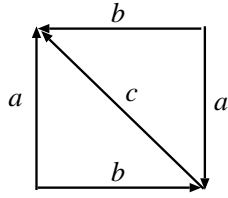
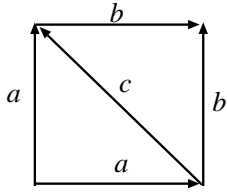
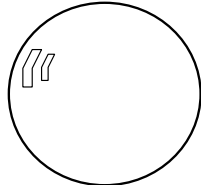
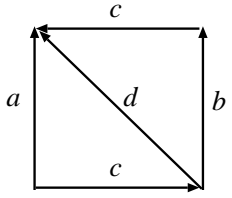
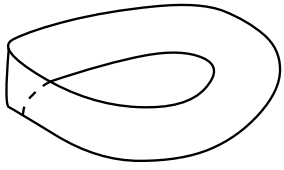
$$\partial P = 0, \quad \text{よって} \quad Z_0 = C_0 = \mathbf{Z}P, \quad B_0 = 0$$

以上より, Klein bottle のホモロジー群は

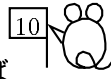
$$H_2 = 0, \quad H_1 = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}_2, \quad H_0 = \mathbf{Z}$$

- ⊗ 1) $B_1 \cong \mathbf{Z} \oplus 2\mathbf{Z} \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ だが,
商加群を取るときは, B_1 の Z_1 への入り方に注意が要る.
2) \mathbf{Z}_2 に属する元は, それ自身は膜を張れないが,
2 周したら膜を張れるようなもの.

問題 6 Möbius の帯 (左), 球面 (中), および射影平面 (右) の
ホモロジー群を計算せよ.



オイラーの多面体定理 (Euler 1752)



どんな凸多面体についても、頂点の数を v 、辺の数を e 、面の数を s とすれば、 $\chi := v - e + s = 2$ が成り立つ (位相幾何の最初の結果)

実は、穴が g 個ある多面体については $\chi = 2 - 2g$ となることが分かる。
 χ を Euler 標数 (または Euler の特性数 characteristic) と呼ぶ。

証明は $v + e + s$ に関する帰納法で初等的にできるが、
ホモロジー群でより明快に説明できる：

定義 Betti 数 $b_j := \text{rank } H_j$

ここに、有限生成アーベル群の階数とは、それに含まれる自由加群 Z の個数のこと。

cf. 有限生成アーベル群の構造定理： $G \cong Z^r \oplus \bigoplus_j Z_{n_j}$, $r = \text{rank } G$

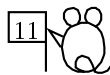
鎖を考える際に、係数を Z から R に“係数拡大”すると、捻れ部分が消失して線型代数に帰着し、rank は単に次元と解釈できる。

Euler-Poincaré の公式 $\chi = b_0 - b_1 + b_2$ である。

この故に χ を Euler-Poincaré 標数ともいう
後で示されるようにホモロジー群は位相不変量なので、これから χ が位相不変量なことが分かる。

v, e, s それぞれは不変量ではないことに注意！

ホモロジー群の抽象化 — ホモロジー代数



指数定理：加群の準同型の列

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{F_2} C_1 \xrightarrow{F_1} C_0 \longrightarrow 0$$

において、連続する写像の合成がすべての箇所で 0 となっているとき、鎖複体 (chain complex) と呼ぶ。

$\text{rank } C_2 - \text{rank } C_1 + \text{rank } C_0$ を鎖複体の指数 (index) と呼ぶ。

鎖複体においては、鎖ホモロジー群 $H_j(C) := \text{Ker } F_j / \text{Image } F_{j+1}$

が定義される。このとき、一般に

$$\text{rank } C_2 - \text{rank } C_1 + \text{rank } C_0 = \text{rank } H_2 - \text{rank } H_1 + \text{rank } H_0$$

証明は準同型定理による： $C_j/Z_j \cong B_{j-1}$ より

$$\text{rank } C_j = \text{rank } Z_j + \text{rank } B_{j-1}$$

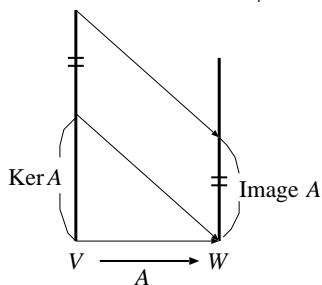
$$\therefore \sum_{j=0}^2 (-1)^j \text{rank } C_j = \sum_{j=0}^2 (-1)^j (\text{rank } Z_j + \text{rank } B_{j-1})$$

$$= \sum_{j=0}^2 (-1)^j (\text{rank } Z_j - \text{rank } B_j) = \sum_{j=0}^2 (-1)^j \text{rank } Z_j / B_j$$

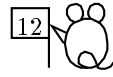
$$= \sum_{j=0}^2 (-1)^j \text{rank } H_j \quad (\text{ここで } \text{rank } B_j, j < 0 \text{ は } 0 \text{ と規約。})$$

線型代数なら、次元の不変性定理： $A : V \rightarrow W$ を線型写像とすれば

$$\dim V = \dim \text{Ker } A + \dim \text{Image } A$$



Hauptvermutung (主仮説)



前回のホモロジー群の定義から分かるように、ホモロジー群は位相多様体に対して直接は定義できない。三角形分割が必要。

では、一つの位相多様体に二種の三角形分割があったとき、それぞれで計算したホモロジー群は一致するか？

一方が他方の細分なら一致することは容易に確かめられる。

全く独立に作られた二つの三角形分割は、両者の細分を繰り返してゆけば、いつかは一致する？ (Poincaré の Hauptvermutung)

1969年 Kirby と Siebenmann により $n \geq 5$ で否定的に解決！

位相多様体と PL 多様体は分類が別。後者の方が細かい。

($n = 4$ は未解決。 $n = 2, 3$ はそれ以前に肯定的解決)

しかし、ホモロジー群が位相多様体の不変量であることは、既に 1940 年代に別の方法で示されていた。

⇒ 特異ホモロジー理論：

三角形分割を使わず、三角形から位相多様体への一対一連続写像の全体を考え、その \mathbb{Z} 係数有限和を特異鎖 (singular chain) としてホモロジー群を定義すると、三角形分割で定義したものと一致する。

