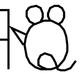
幾何入門　第６回

情報科学科　金子　晃
Алексей　КАНЕНКО
kanenko@is.ocha.ac.jp
この講義のホームページ:
http://www.atom.is.ocha.ac.jp/˜kanenko/KOUGI/Geo/geo.html
この講義のホームディレクトリ:
edusv.edu.is.ocha.ac.jp/˜kanenko/Geo

２次元多様体の分類



位相多様体の分類はめちゃ難しいが,
２次元の境界が無い向き付け可能な位相多様体の分類は簡単 !:
g 個の穴の開いた浮き袋で尽くされる.

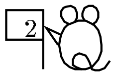
この分類は PL 多様体にしても C^∞ 多様体にしても C^ω 多様体にしても同じ.

しかし, 複素一次元の多様体としては, 分類はもっと複雑 :
$g=0$ は Riemann 球面しかない.
$g=1$ は楕円曲線. j-invariant と呼ばれる複素 1 パラメータで分類される,
互いに同値でないものが無数に存在.
楕円曲線を $y^2=x^3+ax+b$ と表現するとき, $j(E):=2^8\dfrac{a^3}{b^2/4+a^3/27}$
楕円曲線を $y^2=x(x-1)(x-\lambda)$ と表現するとき,

$$j(\lambda):=2^8\frac{(\lambda^2-\lambda+1)^3}{\lambda^2(\lambda-1)^2}$$

楕円曲線は必ず上の形に帰着できるので, 自己同型は, 集合として
$\{0,1,\lambda,\infty\}\mapsto\{0,1,\mu,\infty\}$ なる対応を与える $\boldsymbol{P^1}$ の変換のみ.
$\boldsymbol{P}^1$ の双正則写像は一次変換 $w=\dfrac{cz+d}{az+b}$ $(ad-bc\neq 0)$ に限られる (函数論)
i.e. 複素射影直線の射影変換のみ. しかし 4 点の行き先は自由ではない.

一次変換は 4 点の複比 (cross ratio) を保つ：



$(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto (w_1, w_2, w_3, w_4)$ なら

$$\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \frac{w_1 - w_3}{w_2 - w_3} : \frac{w_1 - w_4}{w_2 - w_4}$$

よって,

$$(0, 1, \lambda, \infty) \mapsto (0, 1, \mu, \infty) \Longrightarrow \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{\mu}{1-\mu} \Longrightarrow \mu = \lambda,$$

$$(0, 1, \lambda, \infty) \mapsto (0, 1, \infty, \mu) \Longrightarrow \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{1-\mu}{\mu} \Longrightarrow \mu = 1 - \lambda,$$

$$(0, 1, \lambda, \infty) \mapsto (0, \mu, 1, \infty) \Longrightarrow \frac{\lambda}{1-\lambda} = -\frac{1}{1-\mu} \Longrightarrow \mu = \frac{1}{\lambda},$$

$$(0, 1, \lambda, \infty) \mapsto (0, \mu, \infty, 1) \Longrightarrow \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{1}{\mu} \Longrightarrow \mu = \frac{1-\lambda}{\lambda},$$

$$(0, 1, \lambda, \infty) \mapsto (0, \infty, 1, \mu) \Longrightarrow \frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{1}{\mu} \Longrightarrow \mu = \frac{1}{1-\lambda},$$

$$(0, 1, \lambda, \infty) \mapsto (0, \infty, \mu, 1) \Longrightarrow \frac{\lambda}{1-\lambda} = \mu \Longrightarrow \mu = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

となるから

$$\mu = \lambda, \quad \frac{1}{\lambda}, \quad 1 - \lambda, \quad \frac{1}{1-\lambda}, \quad \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad \frac{1-\lambda}{\lambda}$$

の六つの可能性しかない. (複比は $z_1 \leftrightarrow z_2$, $z_3 \leftrightarrow z_4$ という同時交換で不変なので，最初の 0 も込めて動かしてもこれ以上新しい関係は生じない.)

さて，楕円函数を用いて

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{C}/(\boldsymbol{Z}+\tau\boldsymbol{Z}) & \leftrightarrow & E: y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \\ \tau & \leftrightarrow & \lambda \end{array}$$

という対応が付いた．

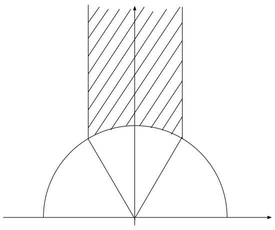
(Weierstrass の $\wp$ 函数だと方程式 $y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$ 経由だが,
Jacobi の楕円函数を用いると直接 τ と λ の対応が書ける.)

この対応で，λ への対称群 S_3 の作用は τ への $SL(2,\boldsymbol{Z})$ の作用に対応する：

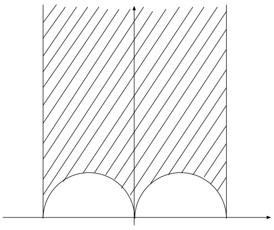
$$\tau \mapsto \frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \quad a,b,c,d \in \boldsymbol{Z},\ ad-bc=1$$

(ただし, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod 2$ なる元より成る部分群 Γ_2 は
恒等変換で働くので, $SL(2,\boldsymbol{Z})/\Gamma_2 \leftrightarrow S_3$ が実際の対応となる.)

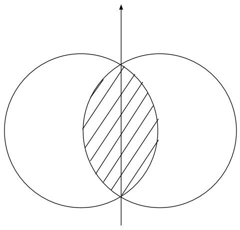
よって, τ の複素平面でこれらの変換により写り得る点を
同一視すると, 下図のような複素領域 (変換群の基本領域)
の各点に楕円曲線の双正則同値類の一つ一つが対応する：



上半平面への $SL(2,\boldsymbol{Z})$
の作用の基本領域 $\mathcal{D}$
$j(\lambda(\tau)): \mathcal{D} \xrightarrow{1:1} \boldsymbol{P}^1$



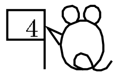
上半平面への Γ_2 の
作用の基本領域 $\mathcal{D}_2$
$\lambda(\tau): \mathcal{D}_2 \xrightarrow{1:1} \boldsymbol{P}^1$



$\boldsymbol{P}^1$ への S_3 の
作用の基本領域 F
$j(\lambda): F \xrightarrow{1:1} \boldsymbol{P}^1$

これを楕円曲線のモデュライの空間という.

$J(\tau) := j(\lambda(\tau))$ はこの左の領域 $\mathcal{D}$ から $\boldsymbol{P}^1$ への一対一写像となる
(Jacobi の楕円モデュラー函数)



$g \geq 2$ の Riemann 面は $3g-3$ 個の分類複素パラメータを持つ.
(Riemann 面のモデュライの数)
$g=2$ だと, モデュライは 3 . 標準形は超楕円曲線
$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)(x-\mu)(x-\nu)$ で尽くされる.

$g \geq 3$ だと必ずしも超楕円曲線の方程式で表せるものばかりとは限らない.

微分位相幾何学のお話

位相多様体に可微分多様体の構造を入れ, 研究の手がかりとする学問.

代表的な成果：
S^7 には通常の球面の可微分構造とは異なる (微分同相でない) 可微分多様体の構造を入れることができる (エキゾチックな球面) J. Milnor 1956

R^4 には通常のユークリッド空間の可微分構造とは異なる (微分同相でない) 可微分多様体の構造を入れることができる Donaldson 1983
この結果は物理のゲージ理論を利用して証明されたことで有名
(物理学の数学への応用)

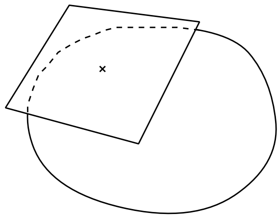
可微分多様体の構造を入れることができない位相多様体が存在する
(Kervaire 1960 他)

３次元以下の多様体には常に可微分多様体の構造をちょうど一種類だけ入れることができる.
４次元のエキゾチック球面が存在するかどうかは未解決.

可微分多様体は一意的に三角形分割可能である.
しかし, 逆はうそ.
$n \leq 7$ 次元の PL 多様体はエッジを丸めて可微分多様体にできるが,
$n \geq 8$ 次元の PL 多様体で“平滑化”できないものが存在する.

エキゾチックな可微分多様体を三角形分割したものは,
PL 多様体としては普通のものと同型になる.

第４章　微分幾何学
— ベクトル場と微分形式の理論



接ベクトル空間： 多様体の一次近似

C^∞ 多様体 M の接ベクトル空間は,
３次元空間内の曲面の接平面を抽象化した概念.

多様体 M はユークリッド空間内に
存在するとは限らないので,
接ベクトル空間は抽象的に定義する：
点 P$\in M$ における座標近傍を $U \subset M$,
局所局所座標を $x^1, \ldots, x^n \in \Omega \subset \boldsymbol{R}^n$ とする.

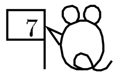
$$\text{i.e.}\quad (x^1, \ldots, x^n): \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \Omega \\ \Cup & & \Cup \\ \mathrm{P} & \mapsto & 0 \end{array} \quad \text{は位相同型}$$

このとき, 点 P における M の接ベクトル (tangent vector) とは

$$\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n}, \qquad \xi^1, \ldots, \xi^n \in \boldsymbol{R}$$

の形の元のこと.
従って, 点 P における接ベクトル空間, すなわち接ベクトルの全体は $\cong \boldsymbol{R}^n$.

余接ベクトル空間



微分計算で出て来るもう一つの重要な記号：
点 P における M の余接ベクトル (cotangent vector) とは

$$a_1 dx^1 + \cdots + a_n dx^n, \qquad a_1, \ldots, a_n \in \boldsymbol{R}$$

の形の元のこと.

☆ 双対性
接ベクトル空間と余接ベクトル空間は $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間として
互いに双対
$\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)$ と $(dx^1, \ldots, dx^n)$ は双対基底を成す：

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x^j}, dx^k \right\rangle = \delta_j^k \quad \text{(Kronecker のデルタ)}$$

従って

$$\left\langle \xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n}, a_1 dx^1 + \cdots + a_n dx^n \right\rangle = \xi^1 a_1 + \cdots + \xi^n a_n$$

座標変換

点 P における局所座標を $x^1, \dots, x^n$ から $y^1, \dots, y^n$ に替えると

$$\xi^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + \xi^n \frac{\partial}{\partial x^n} \mapsto \xi^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^j} + \cdots + \xi^n \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial y^j}{\partial x^n} \frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$= \eta^1 \frac{\partial}{\partial y^1} + \cdots + \eta^n \frac{\partial}{\partial y^n}$$

ここに $\eta^j = \sum_{k=1}^{n} \xi^k \frac{\partial y^j}{\partial x^k}, \quad j = 1, \dots, n$ (反変 contravariant)

$$a_1 dx^1 + \cdots + a_n dx^n \mapsto a_1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^1}{\partial y^j} dy^j + \cdots + a_n \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^n}{\partial y^j} dy^j$$

$$= b_1 dy^1 + \cdots + b_n dy^n$$

ここに $b_j = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \quad j = 1, \dots, n$ (共変 covariant)

一般のテンソル

ベクトルとは座標の添え字一個だけを含む量
テンソルとは座標の添え字を複数個含む量
　添え字の総数をテンソルの階数 (次数) と呼ぶ.
　例： $\{T_{ij}^{kl}\}_{i,j,k,l=1}^{n}$　2 階共変, 2 階反変, 合わせて 4 階のテンソル
　このようなものは弾性論や流体力学などで応用上しばしば現れる.

☆ テンソルの座標変換則：それぞれの成分に応じた変換を受ける.
　$(x^1,\ldots,x^n)$ 座標での成分 T_{ij}^{kl} から $(y^1,\ldots,y^n)$ 座標での成分 $\widetilde{T}_{ij}^{kl}$ への変換則は

$$\widetilde{T}_{ij}^{kl} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta=1}^{n} T_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} \frac{\partial y^k}{\partial x^\gamma} \frac{\partial y^l}{\partial x^\delta}$$

☆ 共変テンソル：共変添え字だけを持つテンソル
☆ 反変テンソル：反変添え字だけを持つテンソル

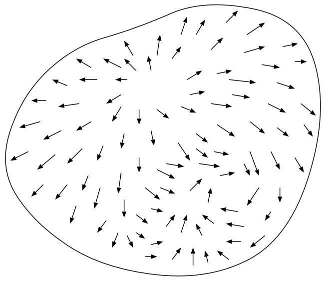
☆ 対称テンソル：共変または反変テンソルで, 添え字を任意に置換したものが同じ値の成分よりなるもの
　例： $T_{ij} = T_{ji}\ \ \forall i,j = 1,...,n$ のとき 2 階共変対称テンソル

☆ 交代テンソル：共変または反変テンソルで, 添え字を置換したとき, 置換の符号に応じて符号だけを変えるもの
　例： $T_{ij} = -T_{ji}\ \ \forall i,j = 1,\ldots,n$ のとき 2 階共変交代テンソル
　このとき, 特に $T_{ii} = 0\quad i = 1,\ldots,n$ である.

弾性係数は 4 階のテンソルだが，部分的な対称性を持つ．

ベクトル場

多様体 M の各点 P に接ベクトル $\boldsymbol{v}(\mathrm{P})$ が与えられているとき
これを M 上の接ベクトル場という.
余接ベクトル場も同様に定義されるが,
普通は接ベクトル場のことを
単にベクトル場と呼ぶ.



ベクトルの成分が点の座標に
連続に依存するとき連続ベクトル場
C^∞ に依存するとき C^∞ 級ベクトル場
などという

ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^n$ では, ベクトル場は函数を n 個並べたものと差は無いが, 多様体 M の上では両者は全く異なる：
函数は座標が無くても値が意味を持ち, 座標変換しても値は代わらないが,
ベクトル場は座標を導入しなければ成分を表すことができず, しかも
座標を取り替えると, 接ベクトルと同じ変換則により成分の値が変化する：

x と y が同一点の座標なら $$\eta^j(y) = \sum_{k=1}^{n} \xi^k(x) \frac{\partial y^j}{\partial x^k}, \quad j = 1, \dots, n$$

テンソル場

一定の型のテンソルが各点に与えられているもの．
例：２階反変，２階共変テンソル場 $T(\mathrm{P})$ は，局所座標では
$\sum_{i,j,k,l=1}^{n} T^{ij}_{kl}(x)\dfrac{\partial}{\partial x^i}\otimes\dfrac{\partial}{\partial x^j}\otimes dx^k\otimes dx^l$ などと記される．

成分が連続的に変化するとき連続テンソル場，
成分が局所座標に C^∞ に依存するとき C^∞ 級テンソル場
などという．
物理で出て来るのは， 単独のテンソルでなくテンソル場が普通．
例：弾性係数など．
これを単にテンソルと呼ぶことも多い．

各点でのテンソル場の値が対称テンソルのとき，対称テンソル場，
交代テンソルのとき交代テンソル場と呼ぶ．
これらは幾何学で重要：
交代テンソル場はすぐ後でやる．
対称テンソル場は Riemann 幾何学で出て来る．

微分形式

共変ベクトル場のことを 1 次の微分形式とも呼ぶ．
局所座標で

$$a_1(x)dx^1 + \cdots + a_n(x)dx^n$$

これは線積分要素だ！

高次の微分形式は交代共変テンソル場のこと．例 k 次の微分形式は

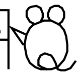
$$\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} a_{i_1\ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

ここに，$\wedge$ は外積と呼ばれ，交代テンソル積を作る操作：

双線型 $(\omega_1 + \omega_2) \wedge \theta = \omega_1 \wedge \theta + \omega_2 \wedge \theta$,
$\theta \wedge (\omega_1 + \omega_2) = \theta \wedge \omega_1 + \theta \wedge \omega_2$
交代的 $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$.　これを繰り返して
ω が k 次の微分形式のとき $\omega \wedge dx^i = (-1)^k dx^i \wedge \omega$
特に，同じ因子が二度含まれれば 0 になる： $dx^i \wedge dx^i = 0$

k 次微分形式は k 次元の体積要素 (符号付き！)

微分形式の積分



D を C^∞ 級の特異 k-鎖で一つの座標近傍に含まれるものとする

$$\begin{array}{cccccc} \varphi: & \Delta\subset \boldsymbol{R}^k & \longrightarrow & D\subset\Omega & & \text{は可微分写像,} \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid & & \\ & t & \mapsto & \varphi(t) & & \end{array}$$

ω を C^∞ 級 k 次微分形式とする： $\omega=\sum a_{i_1\cdots i_k}(x)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$

このとき，微分形式の積分を

$$\int_D\omega=\int_\Delta\sum a_{i_1\cdots i_k}(\varphi(t))d(\varphi^{i_1}(t))\wedge\cdots\wedge d(\varphi^{i_k}(t))$$

で定義する．ここに

$$d(f(t))=\sum_{j=1}^k\frac{\partial f(t)}{\partial t^j}dt^j$$

で微分を計算し，外積の双線型性と交代性を用いて最終的に
$dt^1\wedge\cdots\wedge dt^k$ で括り, 最後は $\wedge$ を取って普通に積分計算する．

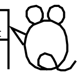
一般の鎖に対する積分は，鎖を台が小さなものの和に分解し，
おのおのを局所座標で表して上の定義を当てはめて計算したものの和とする．
積分値は局所座標の取り方によらない：

積分の変数変換では Jacobian が現れる

$x=\Phi(y)$ なら $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\det\left(\dfrac{\partial x^j}{\partial y^i}\right)dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n$

多重線型性と交代性を用いて基本形に変形して行く計算は
行列式の計算と同じ！

cf. 行列式の最も高級な定義法：$\det(a_{ij})$ は
$\sum_{j_1=1}^n a_{1j_1}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge\sum_{j_n=1}^n a_{nj_n}dx^{j_n}=c\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ と
表したときの係数 c のこと.



例 1：1 次微分形式の道に沿う線積分
$D : x = \varphi(t),\ \ t \in \mathit{\Delta} = [a, b], \quad \omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx^i$ のとき

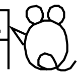
$$\int_D \omega = \int_{\mathit{\Delta}} \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i(\varphi(t)) \frac{d\varphi^i(t)}{dt} \Big) dt$$

積分値は，道の向きを変えれば符号を変える．($t \mapsto \varphi(a + b - t)$ を考えよ.)

例 2：2 次微分形式の膜に沿う面積分
$D : x = \varphi(u, v),\ \ (u, v) \in \mathit{\Delta} \subset \boldsymbol{R}^2, \quad \omega = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$ のとき

$$\begin{aligned} \int_D \omega = \iint_{\mathit{\Delta}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\varphi(u,v)) &\Big(\frac{\partial \varphi^i(u,v)}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi^i(u,v)}{\partial v} dv \Big) \\ &\wedge \Big(\frac{\partial \varphi^j(u,v)}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi^j(u,v)}{\partial v} dv \Big) \\ = \iint_{\mathit{\Delta}} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\varphi(u,v)) &\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi^i(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \varphi^i(u,v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi^j(u,v)}{\partial u} & \frac{\partial \varphi^j(u,v)}{\partial v} \end{vmatrix} du \wedge dv \end{aligned}$$

計算には外積の双線型性と交代性を用いた.
積分値は，膜の表裏を変えれば符号を変える．



例 1 の計算例：1 次微分形式 $\omega = xdx + yxy + zdz$ の空間螺旋
$C : x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ の一巻き分 $0 \leq t \leq 2\pi$ に沿う線積分

$$\begin{aligned}\int_C \omega &= \int_0^{2\pi} (a\cos t \cdot (-a\sin t) + a\sin t \cdot a\cos t + bt \cdot b)dt \\ &= \int_0^{2\pi} bt^2 dt = \frac{2b^2\pi}{3}\end{aligned}$$

例 2 の計算例：2 次微分形式 $\omega = xdy \wedge dz$ の輪環面
$S : x = (a + b\cos v)\cos u, y = (a + b\sin v)\cos u, z = b\sin u$ に沿う面積分

$$\begin{aligned}\iint_S \omega &= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (a + b\cos v)\cos u\{-(a + b\sin v)\sin u du + b\cos v\cos u dv\} \\ &\qquad \wedge b\cos u du \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} (a + b\cos v)b^2\cos^3 u\cos v du dv = 0\end{aligned}$$