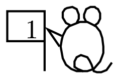
幾何入門　第７回

情報科学科　金子　晃
Алексей　КАНЕНКО
kanenko@is.ocha.ac.jp
この講義のホームページ:
http://www.atom.is.ocha.ac.jp/~kanenko/KOUGI/Geo/geo.html
この講義のホームディレクトリ:
edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo

微分形式の外微分



k 次の微分形式 $\omega = \sum_{i_1,\ldots,i_k} a_{i_1\cdots i_k}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ から

$k+1$ 次の微分形式を作る操作：

$$d\omega := \sum_{i_1,\ldots,i_k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1\cdots i_k}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

例 0　0 次微分形式は函数のことと規約する. $\omega = f(x)$ の外微分は全微分：

$$df(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x^j} dx^j$$

例 1　1 次微分形式 $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx^i$ の外微分は

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_i(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i = \sum_{1 \le i < j \le n} \left(\frac{\partial a_j(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i(x)}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j$$

特に, 2 変数のときは, 座標を (x, y) で表すとき,

$\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy$ に対し

$$\begin{aligned} d(f dx + g dy) &= \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial g}{\partial y} dy \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

例 2　2 次微分形式 $\omega = \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} a_{ij}(x) dx^i \wedge dx^j$ の外微分は

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{1 \le i < j < k \le n}^{n} \left(\frac{\partial a_{jk}(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial a_{ik}(x)}{\partial x^j} + \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x^k} \right) dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \end{aligned}$$

外微分に対する Leibniz の公式

ω を p 次, θ を q 次の微分形式とするとき

$$\boxed{d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta}$$

$$\because \quad \omega = \sum_{i_1,\dots,i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}, \quad \theta = \sum_{j_1,\dots,j_q} b_{j_1\cdots j_q}(x) dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}$$

とすれば

$$\omega \wedge \theta = \Big(\sum_{i_1,\dots,i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \Big) \wedge \Big(\sum_{j_1,\dots,j_q} b_{j_1\cdots j_q}(x) dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q} \Big)$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q} a_{i_1\cdots i_p}(x) b_{j_1\cdots j_q}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots dx^{j_q}$$

$$\therefore \quad d(\omega \wedge \theta)$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}(x) b_{j_1\cdots j_q}(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots dx^{j_q}$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}(x)}{\partial x^k} b_{j_1\cdots j_q}(x) dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots dx^{j_q}$$

$$+ \sum_{i_1,\dots,i_p,j_1,\dots,j_q} \sum_{k=1}^{n} a_{i_1\cdots i_p}(x) \frac{\partial b_{j_1\cdots j_q}(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots dx^{j_q}$$

$$= \sum_{i_1,\dots,i_p} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_p}$$

$$\wedge \sum_{,j_1,\dots,j_q} b_{j_1\cdots j_q}(x) dx^{j_1} \wedge \cdots dx^{j_q}$$

$$+(-1)^p \sum_{i_1,\dots,i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots dx^{i_p}$$

$$\wedge \sum_{,j_1,\dots,j_q} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial b_{j_1\cdots j_q}(x)}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots dx^{j_q}$$

$$= d\omega \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge d\theta$$

$d^2 = 0$

実際, p 次の微分形式 $\omega = \sum_{i_1,\dots,i_p} a_{i_1\cdots i_p}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ に対し

$$d\omega = \sum_{i_1,\dots,i_p} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}(x)}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \cdots \wedge dx^{i_p}$$

$$\begin{aligned} d(d\omega) &= \sum_{i_1,\dots,i_p} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\frac{\partial a_{i_1\cdots i_p}(x)}{\partial x^j}\Big) dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \\ &= \sum_{i_1,\dots,i_p} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}(x)}{\partial x^k \partial x^j} dx^k \wedge dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \end{aligned}$$

ここで, 偏微分の順序交換ができることから, $\dfrac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}(x)}{\partial x^k \partial x^j} = \dfrac{\partial^2 a_{i_1\cdots i_p}(x)}{\partial x^j \partial x^k}$
i.e. $dx^j \wedge dx^k$ の係数と $dx^k \wedge dx^j$ の係数は等しいから,
同類項をまとめたときに, これらは反対称性により打ち消す.

実は, $d^2 = 0$ と $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge (-1)^p \theta$ と $df(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x^k} dx^k$ とから
微分形式の外微分の最初の定義に自然に到達する：

$$\begin{aligned} & d\big(f(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}\big) \\ &\quad = d(f(x)) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} + f(x) d(dx^{i_1}) \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} - + \cdots \\ &\qquad + (-1)^{p-1} f(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge d(dx^{i_p}) \\ &\quad = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} dx^k \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \end{aligned}$$

第２項以下は $d^2 = 0$ より消えた.
より一般の微分形式に対しては d を線型に拡張する.

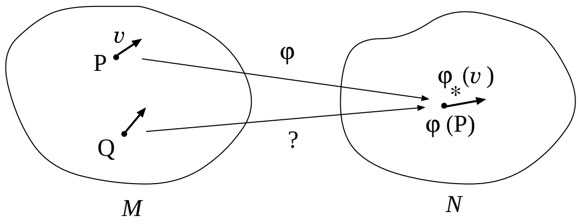
最後の計算中の $f(x)$ は函数ではないので, この計算の過程は座標依存である.
純粋数学としての幾何学では, 座標に依存した定義を嫌うため,
函数に対する $df(x)$ の定義と $d^2 = 0$ と $d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta + \omega \wedge (-1)^p d\theta$
を元に, 局所座標を使わないで (intrinsic に) 外微分の定義をする.

共変と反変

外微分の結果は座標に依存しない. これを少し組織的に見る.

問： 二つの可微分多様体間の可微分写像 $\varphi : M \to N$ があったとき,
自然に引越しができるのは M 上のベクトル場？ N 上のベクトル場？
M 上の微分形式？ N 上の微分形式？ どれが正しい？

答： 反変ベクトルは M から N に自然に引っ越しする (共変的！)
φ の局所座標表示を $y = \varphi(x)$ とし,
M の点 P における接ベクトルの局所座標表示を $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} a^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ とすれば,
N の点 $\mathrm{Q} = \varphi(\mathrm{P})$ の接ベクトルが局所座標表示で
$\vec{w} = \varphi_* \vec{v} := \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a^i \dfrac{\partial y_j}{\partial x^i} \dfrac{\partial}{\partial y^j}$ で定まる.
しかし, ベクトル場になると, うまくゆかない：
係数 $a^i(x)$ に $x = \varphi^{-1}(y)$ を代入しなければならないが,
逆写像は一般には値が一意でない.



これに対し, N 上の微分形式は M に引っ越せる (反変的！)
N 上の微分形式の局所座標表示を

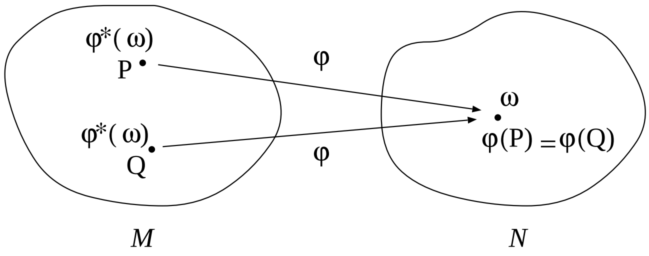
$$\omega = \sum_{i_1,\dots,i_k} a_{i_1,\dots,i_k}(y)dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_k} \text{ とすれば,}$$

M 上の微分形式が

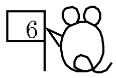
$$\eta = \varphi^*\omega := \sum_{j_1,\dots,j_k} b_{j_1,\dots,j_k}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k},$$

ここに $b_{j_1,\dots,j_k}(y) = \sum_{i_1,\dots,i_k} a_{i_1,\dots,i_k}(\varphi(x))\dfrac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\dfrac{\partial y^{i_k}}{\partial x^{j_k}}$

これは自然に代入して微分計算したもの.
ω の φ による引き戻し (pull back) と呼ぶ.
(既に微分形式の積分の定義で使ってしまった！)



【付録】カテゴリーとファンクター



講義中にカテゴリーとファンクターについていい加減なことを言ったので
ここにまとめておきます.

カテゴリーとはある性質を持つ数学的対象 (オブジェクト) と
それらの間の関係 (モルフィズム) とから成る集まり.

例１：可微分多様体のカテゴリー
　　オブジェクトは可微分多様体 $M, N, \ldots$
　　モルフィズムは可微分写像 $\varphi : M \longrightarrow N, \ldots$
例２：アーベル群のカテゴリー
　　オブジェクトはアーベル群 $G, H, \ldots$
　　モルフィズムは準同型写像 $\varphi : G \longrightarrow H, \ldots$

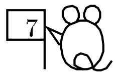
ファンクターとは二つのカテゴリーの間の対応で, ファンクター性を満たすもの

例１：k を固定したとき, k 次ホモロジー群 H_k は,
位相多様体のカテゴリーからアーベル群のカテゴリーへのファンクター
$M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$ を連続写像 (前者のモルフィズム) の列とするとき
$H_k(M_1) \xrightarrow{\varphi_*} H_k(M_2) \xrightarrow{\psi_*} H_k(M_3)$ という群の準同型 (後者のモルフィズム) の列が対応.
ここで, ファンクター性とは, $(\psi\circ\varphi)_* = \psi_*\circ\varphi_*$ が成り立つことをいう.

例２：へそ (一点) を指定された可微分多様体 (M, p) に,
M の点 p における接ベクトル空間 $T_p(M)$ を対応させるものは,
へそ付き可微分多様体のカテゴリーからベクトル空間のカテゴリーへのファンクター.
余接ベクトル空間 $T_p^*(M)$ を対応させるものも同様.

このとき, 可微分写像の列 $(M_1, p_1) \xrightarrow{\varphi} (M_2, p_2) \xrightarrow{\psi} (M_3, p_3)$ に対し,
接ベクトルの方は, 共変：$T_{p_1}(M_1) \xrightarrow{\varphi_*} T_{p_2}(M_2) \xrightarrow{\psi_*} T_{p_3}(M_3)$ なのに対し,
余接ベクトルの方は, 反変：$T_{p_1}^*(M_1) \xleftarrow{\varphi^*} T_{p_2}^*(M_2) \xleftarrow{\psi^*} T_{p_3}^*(M_3)$.
i.e. 古典的な反変と共変の用語の対応が逆になっている！

引き戻しと外積に関する微分形式の公式



☆ 外積は引き戻しと可換： $\boxed{\varphi^*(\omega\wedge\theta)=\varphi^*\omega\wedge\varphi^*\theta}$

∵ 座標を入れて定義を当てはめれば明らか

☆ 外微分は引き戻し写像と可換： $\boxed{d\varphi^*\omega=\varphi^*d\omega}$

∵ まず, 函数 $f(y)$ について $d(\varphi^*f)=\varphi^*df$, すなわち,

$$d(f(\varphi(x)))=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(\varphi(x))}{\partial x^i}dx^i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y^j}(\varphi(x))\frac{\partial y^j}{\partial x^i}dx^i$$

と $\varphi^*\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y^j}(y)dy^j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial y^j}(\varphi(x))\frac{\partial y^j}{\partial x^i}dx^i$ は確かに等しい.

次に N 上の一般の p 次微分形式 $\omega=a(y)dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_p}$ について
φ^* と $\wedge$ が可換なこと, および 0 次のときの結果から

$$\varphi^*d\omega=\varphi^*\Big(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial y^j}dy^j\wedge dy^{i_1}\wedge\cdots\wedge dy^{i_p}\Big)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial y^j}(\varphi(x))\varphi^*(dy^j)\wedge\varphi^*(dy^{i_1})\wedge\cdots\wedge\varphi^*(dy^{i_p})$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial y^j}(\varphi(x))d\varphi^j(x)\wedge d\varphi^{i_1}(x)\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_p}(x)$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a}{\partial y^j}(\varphi(x))\frac{\partial\varphi^j(x)}{\partial x^k}dx^k\wedge d\varphi^{i_1}(x)\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_p}(x)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a(\varphi(x))}{\partial x^k}dx^k\wedge d\varphi^{i_1}(x)\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_p}(x)$$

$$=d\Big(a(\varphi(x))d\varphi^{i_1}(x)\wedge\cdots\wedge d\varphi^{i_p}(x)\Big)$$

$$=d\varphi^*\omega$$

これから特に, 外微分作用素は座標によらない意味を持つことが分かる.

de Rham コホモロジー

$d^2 = 0$ より, 多様体 M 上の k 次微分形式の空間 $\Omega^k(M)$ の列は
外微分作用素を複体の微分として鎖複体 (正確には余鎖複体) を成す：

$$0 \to \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \to \cdots \to \Omega^n(M) \to 0$$

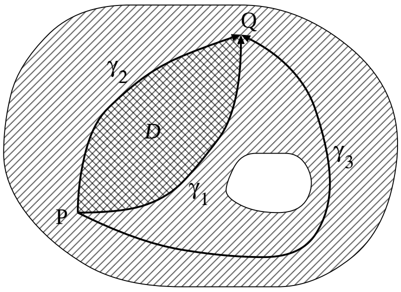
よって, この鎖複体のホモロジー群が定義できるが, 複体の微分写像 d が
ホモロジーの場合とは逆に次数の上がる方向に働くので, コホモロジーと呼ぶ.

$$\begin{aligned}
Z^k(\Omega^{\cdot}(M)) &= \mathrm{Ker}\,\{d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)\} \quad \text{(閉微分形式)}, \\
B^k(\Omega^{\cdot}(M)) &= \mathrm{Image}\,\{d : \Omega^{k-1}(M) \to \Omega^k(M)\} \quad \text{(完全微分形式)} \\
&= d\Omega^{k-1}(M)
\end{aligned}$$

このとき, M の k 次 de Rham コボモロジー群が
$H^k(\Omega^{\cdot}(M)) := Z^k(\Omega^{\cdot}(M))/B^k(\Omega^{\cdot}(M))$ 　で定義される.

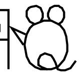
例： $H^1(\Omega^{\cdot}(M))$ の意味. 簡単のため平面で考える.
1 次の微分形式 $\omega = f(x,y)dx + g(x,y)dy$ がいつ $\omega = dF(x,y)$ と書けるか
という問題である.

必要条件は $0 = d^2F(x,y) = d\omega = \left(\dfrac{\partial g}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$ より,
$\omega \in Z^1(\Omega^{\cdot}(M))$ (i.e. 閉形式) なること.
逆に閉形式なら $F(\mathrm{Q}) := \displaystyle\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \omega$ は局所的には P と Q を結ぶ道によらずに
定まる.



$$\int_{\gamma_1 - \gamma_2} f(x,y)dx + g(x,y)dy$$
$$= \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = 0$$
(平面における Green の定理より)

しかし, 領域に穴があると, 領域内で膜が張れないくらい遠くの道とは
積分値が食い違ってしまい, $F(\mathrm{P})$ は多価になる.
de Rham コホモロジー群はこの差を表す. ホモロジー群と大いに関係有り？



双対性と種々の積分公式

Green の定理，Stokes の定理，Gauss の発散定理　などは
微積の最後に学ぶ重要な公式である (advanced calculus という)
これらは微分形式で統一的に説明できる．

微分形式の外微分作用素 d は，鎖の境界作用素 ∂ と互いに双対！

これは一般化された Stokes の定理として知られた次の主張による：
ω を $k-1$ 次微分形式, D を k 次の鎖とするとき

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega \qquad \text{i.e.} \quad \langle D, d\omega \rangle = \langle \partial D, \omega \rangle \qquad (1) \qquad (1)$$

cf. 有限次元線型空間の双対空間のペアに対し, $\langle A\vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, A'\vec{y} \rangle$ で,
双対作用素が定義される. A が行列なら A' は A の転置行列に相当する.

例１： $k=1$ のとき, 0 次の微分形式は函数のこと：$\omega = f(\mathrm{P})$
一次の鎖を α とすれば, $\partial\alpha = \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0$
ここに $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1$ はそれぞれ α の始点, 終点
よって上の公式は

$$\int_\alpha df(\mathrm{P}) = \int_{\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0} f(\mathrm{P}) = f(\mathrm{P}_1) - f(\mathrm{P}_0)$$

と読める. 当り前の式！

例２： $k=2$ のとき,

1 次の微分形式は, 局所座標で $\sum_{j=1}^{n} f_j(x)dx_j$

2 次の鎖 D は $\boldsymbol{R}^2$ の標準三角形 $\{(t_1,t_2)\mid t_1\geq 0, t_2\geq 0, t_1+t_2\leq 0\}$ から M への写像.

これも局所座標で $x=\varphi(t_1,t_2)$ と書くと, 引き戻しと外微分の可換性により,

$$\int_D d\omega=\int_\Delta d\varphi^*\omega, \qquad \int_{\partial D}\omega=\int_{\partial\Delta}\varphi^*\omega$$

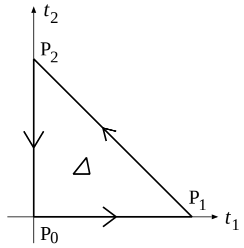
よって最初から $\boldsymbol{R}^2$ 上の 1 次微分形式 $\varphi^*\omega=f(t_1,t_2)dt_1+g(t_1,t_2)dt_2$ と $\boldsymbol{R}^2$ の標準三角形 $\Delta=\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ について Stokes の公式を確かめれば十分.

$\partial\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2=\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}+\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}+\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_0}$,

$d\{f(t_1,t_2)dt_1+g(t_1,t_2)dt_2\}=\Big(\dfrac{\partial g}{\partial t_1}-\dfrac{\partial f}{\partial t_2}\Big)dt_1\wedge dt_2$

だから, 証明すべき式は

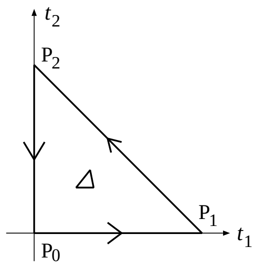
$$\int_{\overrightarrow{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}+\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}+\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_0}}\{f(t_1,t_2)dt_1+g(t_1,t_2)dt_2\}$$
$$=\iint_{\triangle \mathrm{P}_0\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}\Big(\frac{\partial g}{\partial t_1}-\frac{\partial f}{\partial t_2}\Big)dt_1dt_2$$

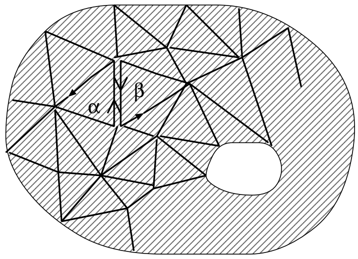


この右辺は$= \displaystyle\iint_{\triangle \mathrm{P_0P_1P_2}} \frac{\partial g}{\partial t_1} dt_1 dt_2 - \iint_{\triangle \mathrm{P_0P_1P_2}} \frac{\partial f}{\partial t_2} dt_2 dt_1$

$$= \int_{\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}} g\,dt_2 - \int_{\overrightarrow{\mathrm{P_0P_2}}} g\,dt_2 - \left(\int_{\overrightarrow{\mathrm{P_2P_1}}} f\,dt_1 - \int_{\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}} f\,dt_1 \right)$$
$$= \int_{\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}} g\,dt_2 + \int_{\overrightarrow{\mathrm{P_2P_0}}} g\,dt_2 + \int_{\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}} f\,dt_1 + \int_{\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}} f\,dt_1$$

と変形され, $\overrightarrow{\mathrm{P_0P_1}}$ 上では $dt_2 = 0$, $\overrightarrow{\mathrm{P_2P_0}}$ 上では $dt_1 = 0$
であることに注意すれば, これから左辺を得る.





一般の二次元領域の上の Green の定理は, 領域を標準三角形の像で
分割すれば, 上の場合の和として証明できる.
分割により領域内に生じた仮想境界線では, その両側の面から生ずる
線積分が逆向きとなり, 和を取ると打ち消し合って最終的には残らない.

例 3： $\boldsymbol{R}^3$ 内の有界領域 D に対する Gauss の発散定理

2 次微分形式を

$\omega = f(x,y,z)dy \wedge dz + g(x,y,z)dz \wedge dx + h(x,y,z)dx \wedge dy$ とすると,

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x}dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial g}{\partial y}dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial h}{\partial z}dz \wedge dx \wedge dy$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)dx \wedge dy \wedge dz$$

よって, 一般化 Stokes 定理 (1) の左辺はこの場合,

$$\iiint_D \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right)dxdydz$$

となる. また右辺の境界積分

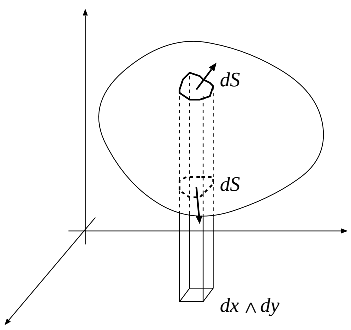
$$\iint_{\partial D} f(x,y,z)dy \wedge dz + g(x,y,z)dz \wedge dx + h(x,y,z)dx \wedge dy$$

は ∂D の外向き単位法線ベクトル $\vec{\nu} = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$ を用いると,
D の局所座標 (y,z), (z,x), (x,y) に対してそれぞれ,
$dy \wedge dz = \nu_x dS$, $dz \wedge dx = \nu_y dS$, $dx \wedge dy = \nu_z dS$ 等と普通の面積分要素に翻訳され, 全体として

$$\iint_{\partial D} \{f(x,y,z)\nu_x + g(x,y,z)dz\nu_y + h(x,y,z)\nu_z\}dS = \int_{\partial D}(f,g,h) \cdot \vec{\nu}dS$$

となる.

(f,g,h) は接ベクトル場ではないので,
Stokes の定理と通常の発散定理とは
カテゴリー的にまだ微妙なギャップが有る.
$\boldsymbol{R}^3$ の中で座標を固定していれば,
差は無視してよい.



例 4： $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面片に対する Stokes の定理
$\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面片を D, 1 次微分形式を $\omega = fdx + gdy + hdz$
とすると,

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)dx \wedge dy + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)dy \wedge dz + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)dz \wedge dx$$

これは, Gauss の発散定理と同様, 普通の面積要素で

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\nu_z dS + \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\nu_x dS + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)\nu_y dS$$

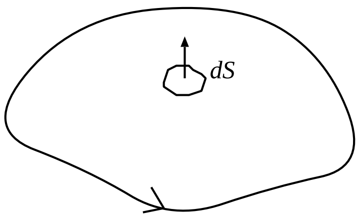
と書き直され, rot の記号を使うと $\mathrm{rot}\,(f, g, h) \cdot \vec{\nu}$ となる.

cf. $\qquad \mathrm{rot}\,(f, g, h) = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

よって, 一般化 Stokes 定理はこの場合

$$\iint_D \mathrm{rot}\,(f, g, h) \cdot \vec{\nu} dS = \int_{\partial D} fdx + gdy + hdz$$

と翻訳される.



レポート問題

問題 7 1) $\boldsymbol{R}^3$ 内の上半球体 $x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ z \geq 0$ の表面上で
微分形式 $xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$ を積分せよ.
ただし表面の向きは外向き法線の向きに取るものとする.

2) Stokes の定理により上の面積分を半球体上の体積積分に直せ.

問題 8 円周 S^1 および flat torus の de Rham コホモロジー群を
直接計算してみよ. ただし, flat torus とは $\boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2$ のことである.

[ヒント：円周の場合は $a(\theta)$ が 2π-周期函数のとき
$a(\theta)d\theta = dF(\theta)$ が 2π-周期函数の解 $F(\theta)$ を持つのはいつかを調べる.]