

幾何入門 第8回



情報科学科 金子 晃

А л е к с е й К А Н Е Н К О

kanenko@is.ocha.ac.jp

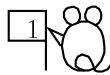
この講義のホームページ:

<http://www.atom.is.ocha.ac.jp/~kanenko/KOUGI/Geo/geo.html>

この講義のホームディレクトリ:

edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo

Stokes 定理の証明



一般に k 次の微分形式に対する Stokes の定理の証明も、
積分を定義により k 単体の上に引き戻して計算すればよい。
 $\Delta \subset \mathbf{R}^k$ に引き戻された ω は

$$\omega = \sum_{j=1}^k a_j(t) dt^1 \wedge \cdots \wedge dx^j \wedge \cdots \wedge dt^k$$

の形をしており、

$$d\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j(t)}{\partial t^j} dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^k$$

よって、各 j に対し

$$\int_{\Delta} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j(t)}{\partial t^j} dt^1 \wedge \cdots \wedge dt^k = \int_{\partial \Delta} a_j(t) dt^1 \wedge \cdots \wedge dx^j \wedge \cdots \wedge dt^k \quad (*)$$

を示せばよい。ここで k -単体を $\Delta = [P_0, P_1, \dots, P_k]$ と置くととき、

$$\partial \Delta = \sum_{i=0}^k \partial_i \Delta, \quad \partial_i \Delta = (-1)^i [P_0, P_1, \dots, P_i, \dots, P_k]$$

で Δ の第 i 面 (face) を定義する (次ページの図参照) と、

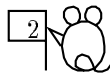
$$\int_{\partial \Delta} a_j(t) dt^1 \wedge \cdots \wedge dx^j \wedge \cdots \wedge dt^k = \sum_{i=0}^k \int_{\partial_i \Delta} a_j(t) dt^1 \wedge \cdots \wedge dx^j \wedge \cdots \wedge dt^k$$

これらの面の中で、 t^i -軸 ($i \neq j$) のどれかと垂直なものの上の積分は、

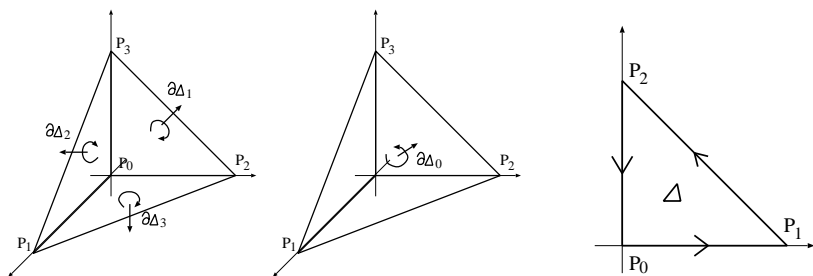
その上で $dt^i = 0$ なので、積分値は 0

よって次の二つの項しか残らない：

$$\int_{\partial_j \Delta} a_j(t) dt^1 \wedge \cdots \wedge dx^j \wedge \cdots \wedge dt^k + \int_{\partial_0 \Delta} a_j(t) dt^1 \wedge \cdots \wedge dx^j \wedge \cdots \wedge dt^k \quad (**)$$



ところで、 k -単体の第 j 面 ($1 \leq i \leq k$) の向きは、
座標軸 $t^1, \dots, t^i, \dots, t^k$ の自然な向きの $(-1)^j$ 倍
第 0 面は座標軸 $t^1, \dots, t^i, \dots, t^k$ の自然な向きの $(-1)^{j-1}$ 倍



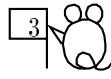
よって、今、区別のため、 $\Delta, \partial_j \Delta$ から向きの概念を取り去った集合を
それぞれ $|\Delta|, |\partial_j \Delta|$ と書くとき

上は (*) の左辺を積分して得られる

$$\begin{aligned} \int_{\Delta} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j(t)}{\partial t^j} dt^1 \wedge \dots \wedge dt^k &= \int_{|\Delta|} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j(t)}{\partial t^j} dt^1 \dots dt^k \\ &= \int_{|\Delta|} (-1)^{j-1} \frac{\partial a_j(t)}{\partial t^j} dt^j dt^1 \dots dt^j \dots dt^k \\ &= \int_{|\partial_0 \Delta|} (-1)^{j-1} a_j(t) dt^1 \dots dt^j \dots dt^k - \int_{|\partial_j \Delta|} (-1)^{j-1} a_j(t) dt^1 \dots dt^j \dots dt^k \\ &= (-1)^{j-1} \int_{\partial_0 \Delta} (-1)^{j-1} a_j(t) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^j \dots \wedge dt^k \\ &\quad - (-1)^j \int_{\partial_j \Delta} (-1)^{j-1} a_j(t) dt^1 \wedge \dots \wedge dt^j \dots \wedge dt^k \end{aligned}$$

となり、(*) の右辺、すなわち (**) と一致する。

【参考】 $\partial^2 \Delta = 0$ の証明： $\Delta = [P_0, P_1, \dots, P_k]$ に対し



$$\partial \Delta = \sum_{i=0}^k (-1)^i [P_0, \dots, P_i, \dots, P_k],$$

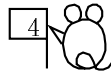
$$\begin{aligned} \partial(\partial \Delta) &= \sum_{j < i} (-1)^j (-1)^i [P_0, \dots, P_j, \dots, P_i, \dots, P_k] \\ &\quad + \sum_{j > i} (-1)^{j-1} (-1)^i [P_0, \dots, P_i, \dots, P_j, \dots, P_k] \end{aligned}$$

ここで第二項の符号が一つずれたのは、 P_i が存在しないので

j 番目が実は $j-1$ 番目だから。

よって、第二項で i と j を入れ換えると、第一項と符号が逆のものが得られ全体として打ち消す。

ホモロジーとコホモロジーの双対関係



Stokes の定理から, 閉形式 ω , 輪体 α に対しては,
内積 $\langle \omega, \alpha \rangle$ の値は $\omega \bmod$ 完全形式, $\alpha \bmod$ 境界輪体で確定することが分かる:

$$\begin{aligned}d\omega = 0, \alpha = \partial\beta \text{ なら } \langle \omega, \alpha \rangle &= \langle \omega, \partial\beta \rangle = \langle d\omega, \beta \rangle = 0, \\ \omega = d\theta, \partial\alpha = 0 \text{ なら } \langle \omega, \alpha \rangle &= \langle d\theta, \alpha \rangle = \langle \theta, \partial\alpha \rangle = 0,\end{aligned}$$

よって, この内積から自然に $H^k(\Omega(M))$ と $H_k(M, \mathbf{R})$ の間の内積が誘導される.

この内積は非退化なことが分かり, これら二つの線型空間の間の双対を与える.

例 1 次の内積の非退化性:

1) 1 次閉形式 $\omega = \sum a_j dx^j$ が大域的に $\omega = df(x)$ と書ける

$$\iff \text{任意の 1-輪体 } \gamma \text{ について } \int_{\gamma} \omega = 0$$

$\because \Leftarrow$ の向きだけ示せばよい.

このとき $f(x) = \int_{x_0}^x \omega$ は始点と終点だけで定まり,

途中の道によらないから, x の一価函数となる.

2) 1-輪体 γ が境界輪体

$$\iff \text{任意の 1 次閉形式 } \omega \text{ に対して } \int_{\gamma} \omega = 0$$

$\because \Leftarrow$ の向きだけ示せばよい. 平面で説明する.

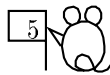
もし 1-輪体 γ に 2 次元の膜が張れず, 内部に穴があると,

$(0, 0) \in$ 穴として $\omega = \text{Im } d(\log z) = \text{Im } \frac{dz}{z} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ は

$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi \text{ を満たす (Cauchy の積分公式)}$$

一般の次数における証明は面倒. 後で.

写像度 (mapping degree)



境界の無い n 次元 C^∞ (PL) 多様体 M の n 次ホモロジー群は

常に \mathbf{Z} と同型：なぜなら、

n -輪体は、 M を構成する n 単体すべての和 $[M] := \sum_{k=1}^N \alpha_k$ の定数倍のみ、

n -境界輪体は 0、だから、

$[M]$ を多様体 M の基本類 (fundamental class) と呼ぶ。

二つの境界の無い n 次元 C^∞ (PL) 多様体 M, N 間の連続写像 $f: M \rightarrow N$ は

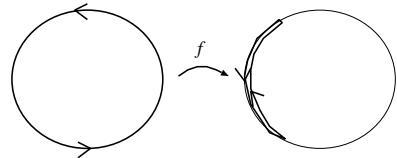
n 次ホモロジー群の写像 $f_*: H_n(M) \rightarrow H_n(N)$ を誘導するので、

$f_*([M]) = c[N]$ となる $c \in \mathbf{Z}$ が存在する。 c を写像 f の写像度と呼ぶ。

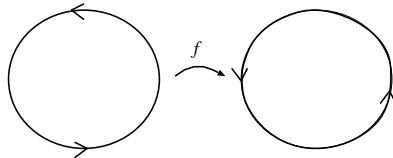
要するに f により M は何重に N に写されるかを表す。

$c < 0$ のときは写像は向きを逆にする。

例： $n = 1$ で $M = N = S^1$ のとき

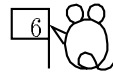


$\deg f = 0$



$\deg f = 1$

ベクトル場の指数



n 次元 C^∞ 多様体 M 上のベクトル場 \vec{v} の特異点とは,
 $\vec{v}(P) = 0$ となる点 $P \in M$ のことである.

孤立特異点 P におけるベクトル場 \vec{v} の指数 (回転数) を次のように定める:

P を中心とする局所座標をとる. $P \leftrightarrow 0$

原点を中心とする十分小さい半径 $\varepsilon > 0$ の球面 S_ε をとると,

S_ε の各点 x で $\vec{v}(x) \neq 0$.

よって, 単位球面 S からそれ自身への写像が誘導される:

$$\begin{array}{ccc} \varphi: S & \rightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \mapsto & \vec{v}(\varepsilon x)/|\vec{v}(\varepsilon x)| \end{array}$$

この写像の写像度をベクトル場の特異点 P における指数と呼び $\text{ind}_P \vec{v}$ で表す.

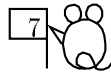
これは, S_ε に沿って正の向きに一周したとき, \vec{v} が回転する回数 (符号付き) と一致.

ベクトル場が孤立特異点しか持たないとき, その特異点における指数を

すべての特異点について加えたものを, このベクトル場の指数と呼ぶ.

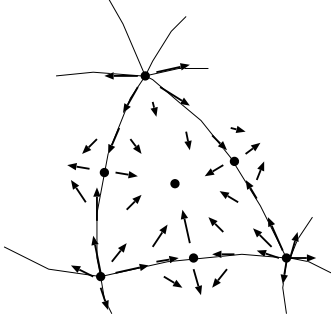
$$\text{ind } \vec{v} = \sum_{P:\text{特異点}} \text{ind}_P \vec{v}$$

定理 ベクトル場の指数は Euler 標数に等しい.



以下, 簡単のため 2 次元で考える.

まず, 指数がちょうど Euler 標数に等しいようなベクトル場を一つ作る.
 M は三角形分割されているとして,

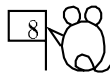


各頂点に湧き出し特異点を,
各面の中心に吸い込み特異点を,
各辺の midpoint に鞍点型特異点を置く

頂点での回転数: 1,
辺の特異点での回転数: -1 ,
面の特異点での回転数: 1,

よって, このベクトル場の多様体全体での指数の総和は $v - e + s = \chi(M)$.

次に、指数がベクトル場の取り方によらないことを言う。
 (以下、 $n = 2$ と読み替えること.)



☆ ベクトル場 \vec{v} は $H^n(M, \mathbf{R})$ の元 $h(\vec{v})$ を定め、 $\text{ind } \vec{v} = \langle [M], h(\vec{v}) \rangle$

∴ n -鎖 α に対し、 $\langle \alpha, \vec{v} \rangle := \sum_{P \in \alpha: \text{特異点}} \text{ind}_P \vec{v}$ と置けば

線型写像 $H_n(M, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$ が確定する.

$[M]$ の三角形分割についてこれらをすべてを加えれば $\text{ind } \vec{v}$ を得る.

☆ 二つのベクトル場 \vec{v}, \vec{w} に対し $h(\vec{v}) - h(\vec{w}) \sim 0$ (0 にコホモローク).

i.e. $\exists g \in Z^{n-1}(M, \mathbf{R})$ s.t. $h(\vec{v}) - h(\vec{w}) = \delta g$.

ここに、余境界作用素 δ は境界作用素 ∂ の双対で、

上は、 $\forall \alpha \in C_n(M, \mathbf{R})$ $\langle \alpha, h(\vec{v}) - h(\vec{w}) \rangle = \langle \partial \alpha, g \rangle$ と同等.

g は次のように選べばよい: 1-単体 β に対し、

$\langle \beta, g \rangle := \beta$ に沿って進む時の
 ベクトル場 \vec{v} の角度変化 - ベクトル場 \vec{w} の角度変化

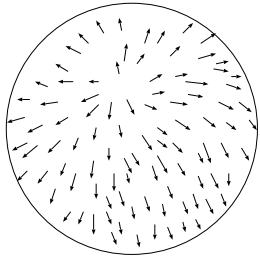
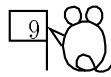
曲がった曲面の上では角度は比較できないので、十分短い1-単体に分割して、一つ一つは平面に射影して角度を測る.

ベクトル場の角度変化自身は定義が曖昧だが、二つのベクトル場の角度変化の差分は意味が付く.

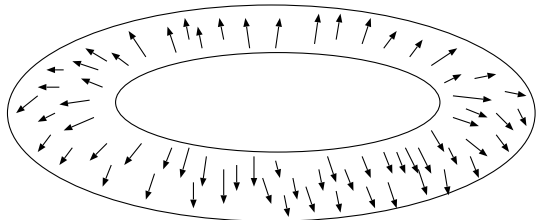
以上より、

$$\text{ind } \vec{v} - \text{ind } \vec{w} = \langle [M], h(\vec{v}) - h(\vec{w}) \rangle = \langle [M], \delta g \rangle = \langle \partial [M], g \rangle = 0$$

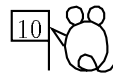
例 1 球面上のベクトル場の特異点の指数は 2
従って、球面上には特異点の無いベクトル場は存在しない。



例 2 トーラス上のベクトル場の特異点の指数は 0
従って、球面上には特異点の無いベクトル場が存在し得る。
実際にも存在する：



つむじの説明はもうちょっと複雑.
(髪の毛は顔には生えていない!)



定理 S^1 上の特異点を持たないベクトル場 \vec{v} が, その内部に特異点を持たないベクトル場として延長できる

$\iff \vec{v}$ の写像度が 0.

$\therefore \implies$ 延長された \vec{v} から

$$\begin{array}{ccc} \varphi : D^2 & \rightarrow & S^1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x & \mapsto & \vec{v}(x)/|\vec{v}(x)| \end{array}$$

という連続写像が定まるが, D が可縮なので, これからもとの写像の写像度 = 0 が分かる.

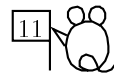
$$\begin{array}{ccc} \Leftarrow \varphi : S^1 & \rightarrow & S^1 \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ x & \mapsto & \vec{v}(x)/|\vec{v}(x)| \end{array}$$

という連続写像の写像度が 0 なら, この写像は定値写像とホモトープになる.

ホモトピー写像を $F(\theta, t) : S^1 \times [0, 1] \rightarrow S^1$, $F(\theta, 1) \equiv P_0$ とすれば,

これを使って写像 $\varphi : D^2 \rightarrow S^1$ が $r = 1 - t, \theta$ を極座標として定まる.

系 髪の毛が顔にかかるところで全部下を向いていれば、どこかにつむじが存在する。



つむじを作らない髪型も有り得る：オールバック
このとき周辺部では必ず接線方向の髪が現われる！

応用：

Brouwer の不動点定理

閉円板からそれ自身への連続写像 f はどこかに必ず不動点を持つ。

∵ 境界に不動点があればおしまい。

境界に不動点が無ければ、

$f(x) - x$ は D^2 上のベクトル場となり、

境界では内向きとなる。

よって境界での写像度は 1 だから、

内部のどこかに不動点

存在しなければならない。

