

# 幾何入門 第9回



情報科学科 金子 晃

А л е к с е й К А Н Е Н К О

kanenko@is.ocha.ac.jp

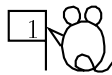
この講義のホームページ:

<http://www.atom.is.ocha.ac.jp/~kanenko/KOUGI/Geo/geo.html>

この講義のホームディレクトリ:

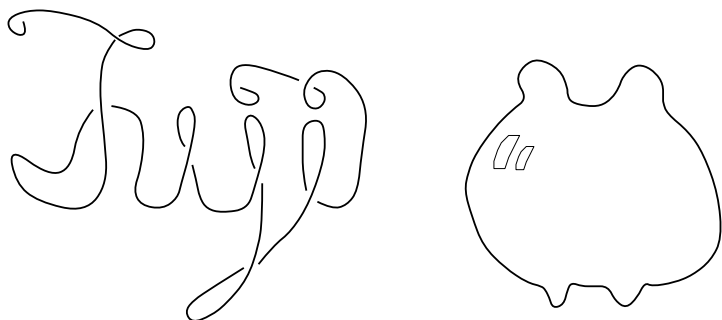
[edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo](http://edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo)

## 第5章 微分幾何学 — 空間に埋め込まれた曲線と曲面の理論



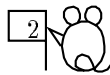
古典的微分幾何, いわゆる3次元空間内の曲線と曲面の理論

CGで使うのは殆どがこのようなオブジェクト.



※ 何かに似てる気がする? 気にしないことにしましょう (^\_^;)

## 滑らかな曲線弧 (微積の復習)



平面曲線:  $x = \varphi(t), y = \psi(t)$  が滑らか

$\Leftrightarrow$  接ベクトル  $(\varphi'(t), \psi'(t))$  が存在し  $\neq (0, 0)$

空間曲線:  $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t)$  が滑らか

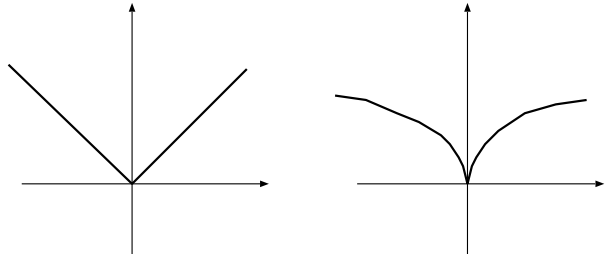
$\Leftrightarrow$  接ベクトル:  $(\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t))$  が存在し  $\neq (0, 0, 0)$

接ベクトルが零ベクトルになるとどうなるか?

例:  $x = t^3, y = |t|^3$   $C^2$  級だが  $t = 0$  で接ベクトルが 0.

そこでは角が生ずる.

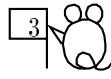
$x = t^3, y = t^2$  は解析的でさえあるが,  $t = 0$  で尖ってしまう.



パラメータ  $t$  を時刻だと思つと, 接ベクトルは速度ベクトル

どんなに急なカーブでも, そこで一旦速度を 0 に落せば滑らかに曲がれる!

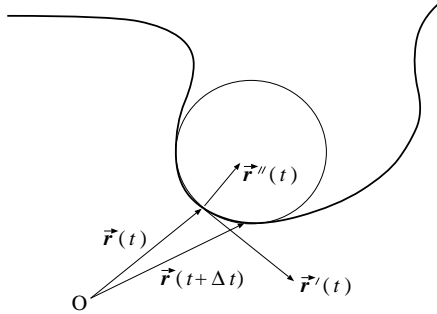
## 平面曲線の曲率

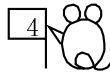


平面曲線の曲率半径は、もっともぴったりフィットする円の半径のこと。  
その逆数を曲率と呼ぶ (曲がり具合を表す)。

曲線  $\vec{x} = \vec{r}(t)$  のパラメータ  $t$  を時刻だと思つと、  
接ベクトル  $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$  は速度ベクトル  
2階微分  $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$  は加速度ベクトル。

どんな曲線も近似的には円を繋げたものとなっている (2次の近似)  
i.e. どんな運動も近似的には等速円運動が繋がっている





円運動の場合は,  $x = R \cos \omega t, y = R \sin \omega t, \omega$ : 角速度.

i.e.  $\vec{r}(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)$

$\Rightarrow \vec{v}(t) = (-R\omega \sin \omega t, R\omega \cos \omega t), \vec{a}(t) = (-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t)$

i.e. 速度ベクトルは接線方向, 加速度ベクトルは円の中心に向かい,

それらの長さは  $|\vec{v}(t)| = R\omega, |\vec{a}(t)| = R\omega^2$

$\therefore R = \frac{|\vec{v}(t)|^2}{|\vec{a}(t)|}, \text{ 円の中心は } \vec{r} + R \frac{\vec{a}(t)}{|\vec{a}(t)|} = \vec{r} + \frac{|\vec{v}(t)|^2}{|\vec{a}(t)|^2} \vec{a}(t)$

一般の曲線の場合は, 速度ベクトルの近似式はそのまま使えるが,

加速度ベクトルの方は

$\vec{a}(t) = (-R\omega^2 \cos \omega t, -R\omega^2 \sin \omega t) + (-R\omega'(t) \sin \omega t, R\omega'(t) \cos \omega t)$

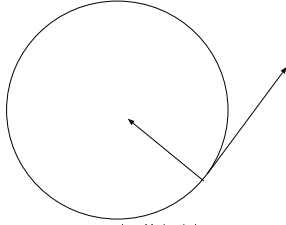
で置き換えなければならない. 従って,  $\vec{v}(t) \times \vec{a}(t) = (0, 0, R^2\omega^3)$  を用いて

$\therefore R = \frac{|\vec{v}(t)|^3}{|\vec{v}(t) \times \vec{a}(t)|}$

数学の記号で書き直すと,  $\vec{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t)),$

$\vec{v}(t) = (\varphi'(t), \psi'(t)), \vec{a}(t) = (\varphi''(t), \psi''(t))$  として

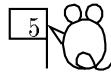
$\kappa(t) = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{\{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2\}^{3/2}}$



特に  $y = f(x)$  のときは  $x$  をパラメータとして  $\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{\{1 + f'(x)^2\}^{3/2}}$

平面曲線の場合は, 分子に絶対値を付けず, 曲率の正負で凸性の情報を含ませるのが普通.

# 空間曲線の曲率



空間曲線も短い間は平面曲線とみなせ、曲率の計算法はそのまま通用する：

曲率半径  $R = \frac{|\vec{r}'(t)|^3}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}$ ,  $\vec{r}(t) = (\varphi(t), \psi(t), \chi(t))$  として

曲率  $\kappa(t) = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} \psi'(t) & \chi'(t) \\ \psi''(t) & \chi''(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \varphi'(t) & \chi'(t) \\ \varphi''(t) & \chi''(t) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \varphi'(t) & \psi'(t) \\ \varphi''(t) & \psi''(t) \end{vmatrix}^2}}{\{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2\}^{3/2}}$

曲率円を含む平面を空間曲線の**接触平面**と呼ぶ。

しかし、空間の曲線はねじれて次第に平面からはみ出してゆく。  
ねじれの度合を測るために、パラメータを弧長にとるのが便利。

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} dt \quad \text{線素 (弧長要素)}$$

すると  $\vec{e}_1 = \frac{d\vec{r}}{ds}$  は単位ベクトルとなる：

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt}, \quad \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \chi'(t)^2} = \frac{ds}{dt} \quad \therefore \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1$$

すると、 $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$  を微分して  $\vec{e}_1 \cdot \frac{d\vec{e}_1}{ds} = 0$ 。

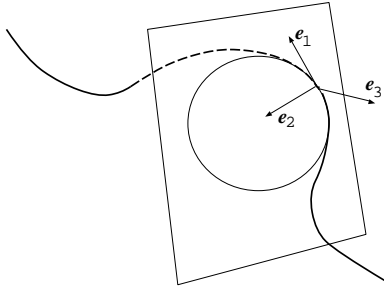
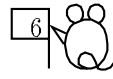
よって  $\frac{d\vec{e}_1}{ds}$  は曲率中心に向かう法線ベクトルとなる。

このとき

$$\kappa = \frac{|\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)|}{|\vec{r}'(s)|^3} = \frac{|\vec{r}'(s)| |\vec{r}''(s)|}{|\vec{r}'(s)|^3} = \frac{|\vec{r}''(s)|}{|\vec{r}'(s)|} = \left| \frac{d\vec{e}_1}{ds} \right| \text{ より,}$$

曲率円の中心に向かう単位ベクトルを  $\vec{e}_2$  と置けば,  $\frac{d\vec{e}_1}{ds} = \kappa \vec{e}_2$

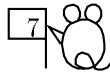
$\vec{e}_3 := \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$  を曲線の**従法線** (または**陪法線**) と呼ぶ.



単位ベクトル  $\vec{e}_2$  の微分もそれ自身と直交するから,  $\frac{d\vec{e}_2}{ds} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_3$ .

ここで,  $\vec{e}_2$  の接触平面内での変化は, それと直角な  $\vec{e}_1$  の変化と同じはずだから, (変化の向きを考えて)  $a = -\kappa$ .

$b$  は接触平面のねじれる速さを表す量で, これを  $\tau$  と書き, 空間曲線の**捩率** (レイリツ) と呼ぶ.



最後に,  $\vec{e}_3$  は  $\vec{e}_2$  と同じねじれ方をし,  
 曲率方向の回転は無視できるから,  $\frac{d\vec{e}_3}{ds} = -\tau\vec{e}_2$  と書ける.

これを計算で示すと,

$$\frac{d\vec{e}_3}{ds} = \frac{d\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{ds} = \frac{d\vec{e}_1}{ds} \times \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \times \frac{d\vec{e}_2}{ds} = \kappa\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \times (-\kappa\vec{e}_1 + \tau\vec{e}_3) = -\tau\vec{e}_2.$$

以上をまとめて Frenet-Serret の公式と呼ぶ:

空間曲線の動標構 (moving frame)

$\vec{r}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  が満たす方程式:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_1, \\ \frac{d\vec{e}_1}{ds} = \kappa\vec{e}_2, \\ \frac{d\vec{e}_2}{ds} = -\kappa\vec{e}_1 + \tau\vec{e}_3, \\ \frac{d\vec{e}_3}{ds} = -\tau\vec{e}_2 \end{cases}$$

曲率と捩率は空間曲線の基本量のすべてである:

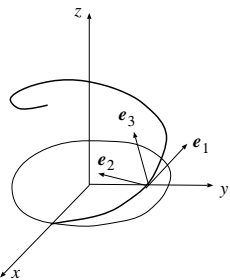
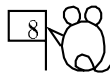
**定理** 二つの関数  $\kappa(s), \tau(s)$  を勝手に与えたとき, これらを曲率, および捩率  
 に持つ空間曲線が (合同を除いて) ただ一つ存在する.

証明は連立常微分方程式の解の存在と一意性から直ちに従う.

動標構の原点  $\vec{r}$  の 3 成分と, フレーム  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  の基準座標からの回転を表す  
 Euler の角 3 個の合わせて 6 個を未知数とし, 6 個の独立な方程式が有る.



らせん  
例：空間螺旋



$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

飛行機が一定の速度で旋回しつつ

高度を上げて行くときの軌跡。

平面に収まらない空間曲線の代表例。

$$\vec{r} = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad \vec{r}' = (-a \sin t, a \cos t, b) \quad \text{より}$$

$$|\vec{r}'|^2 = a^2 + b^2, \quad ds = \sqrt{a^2 + b^2} dt,$$

$$\text{従って } \vec{e}_1 = \left( -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t, \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

$$\frac{d\vec{e}_1}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{e}_1}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left( -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos t, -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin t, 0 \right),$$

$$\text{故に } \vec{e}_2 = (-\cos t, -\sin t, 0) \text{ で, 曲率 } \kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

$$\text{次に, } \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \left( \frac{b \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, -\frac{b \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right),$$

$$\frac{d\vec{e}_2}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d\vec{e}_2}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (\sin t, -\cos t, 0) = -\frac{a}{a^2 + b^2} \vec{e}_1 + \frac{b}{a^2 + b^2} \vec{e}_3$$

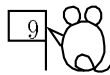
$$\therefore \text{振率 } \tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$\text{上を逆に解くと, } a = \frac{\kappa}{\kappa^2 + \tau^2}, \quad b = \frac{\tau}{\kappa^2 + \tau^2} \text{ で,}$$

これから  $\kappa, \tau$  が任意の定数値を取り得ることも分かる。

曲線論の基本定理によれば、曲率と黎率が定数の曲線は螺旋に限られる。

# 滑らかな曲面片 (微積の復習)



曲面のパラメータ表示:  $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)$

$v$  を止めて  $u$  だけ動かすと,  $u$ -曲線の族ができる.

$u$  を止めて  $v$  だけ動かすと,  $v$ -曲線の族ができる.

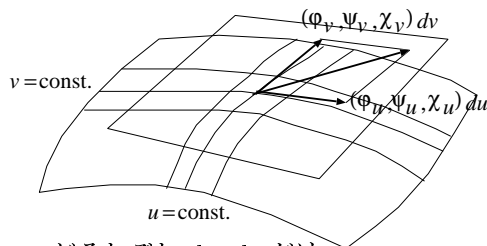
縦糸と横糸で曲面が織り出される.

特に, 接平面は, 2本の接ベクトル

$$(\varphi_u(u, v), \psi_u(u, v), \chi_u(u, v)),$$

$$(\varphi_v(u, v), \psi_v(u, v), \chi_v(u, v))$$

で張られる.



曲面上の線素, すなわち, パラメータ  $u, v$  がそれぞれ  $du, dv$  だけ

増加したときの曲面上の移動量  $ds$  は, 無限小接ベクトル

$d\vec{r} = (\varphi_u, \psi_u, \chi_u)du + (\varphi_v, \psi_v, \chi_v)dv$  の長さに等しく,

$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = |(\varphi_u du + \varphi_v dv, \psi_u du + \psi_v dv, \chi_u du + \chi_v dv)|^2$$

$$= (\varphi_u du + \varphi_v dv)^2 + (\psi_u du + \psi_v dv)^2 + (\chi_u du + \chi_v dv)^2$$

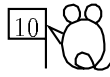
$$= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

ここに  $E = \varphi_u^2 + \psi_u^2 + \chi_u^2$ ,  $F = \varphi_u \varphi_v + \psi_u \psi_v + \chi_u \chi_v$ ,  $G = \varphi_v^2 + \psi_v^2 + \chi_v^2$

これを,  $du, dv$  の対称微分形式とみて, 曲面の**第一基本形式**と呼ぶ:

$$I := Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

(曲面のまわりの空間のユークリッド計量から誘導された Riemann 計量)



曲面の法線は、2本の接ベクトルの外積で与えられる：

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (\varphi_u, \psi_u, \chi_u) \times (\varphi_v, \psi_v, \chi_v) \\ &= \left( \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} \varphi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \chi_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

よって、単位法線ベクトル  $\vec{e}_3$  は滑らかに動く。

曲面上で  $d\vec{r}$  だけ動いたときの  $\vec{e}_3$  の変化の接平面成分を

曲面の**第二基本形式**と呼ぶ：

$$\begin{aligned} \Pi &:= -d\vec{e}_3 \cdot \{(\varphi_u, \psi_u, \chi_u)du + (\varphi_v, \psi_v, \chi_v)dv\} = -\frac{\vec{PQ}}{R} \cdot \vec{PQ} = -\frac{1}{R} I \\ &= -d\theta \overline{PQ} = -2 \cdot \frac{d\theta}{2} \overline{PQ} = -2 \frac{\overline{QH}}{\overline{PQ}} \overline{PQ} = -2\overline{QH} \end{aligned}$$

これらの式から、第二基本形式がまさに曲面の曲がり具合を表していることがよく分かる。

$1/R$  を法曲率 (normal curvature)

と呼ぶ。

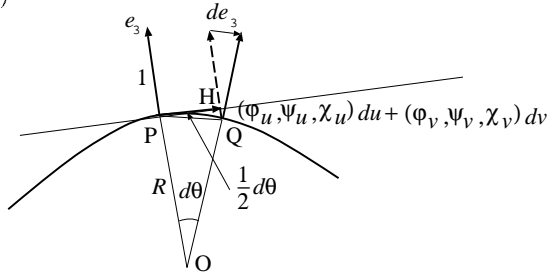
垂直断面の切り口の曲率である。

マイナスを付けたのは、

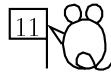
平面曲線の曲率の符号と

合わせるため。

(下に凸なときが曲率正となる。)



第二基本形式の座標による計算：



$$A := |\vec{n}| = \sqrt{\begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \varphi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \chi_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}^2}$$

は面積要素の密度函数であった：  $dS = Adudv$

$$d\vec{e}_3 = d\left(\frac{\vec{n}}{A}\right) = \frac{d\vec{n}}{A} + d\left(\frac{1}{A}\right)\vec{n}$$

において、最後の項は接平面に垂直だから、接平面への射影成分を見るには、

$$\begin{aligned} d\vec{n} &= d\{(\varphi_u, \psi_u, \chi_u) \times (\varphi_v, \psi_v, \chi_v)\} \\ &= (\varphi_{uu}du + \varphi_{uv}dv, \psi_{uu}du + \psi_{uv}dv, \chi_{uu}du + \chi_{uv}dv) \times (\varphi_v, \psi_v, \chi_v) \\ &\quad + (\varphi_u, \psi_u, \chi_u) \times (\varphi_{uv}du + \varphi_{vv}dv, \psi_{uv}du + \psi_{vv}dv, \chi_{uv}du + \chi_{vv}dv) \end{aligned}$$

を計算し、これと  $-\frac{1}{A}\{(\varphi_u, \psi_u, \chi_u)du + (\varphi_v, \psi_v, \chi_v)dv\}$  の内積をとればよい。結果は  $\Pi = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$  ここに

$$L = \frac{1}{A}\{(\psi_u\chi_v - \chi_u\psi_v)\varphi_{uu} + (\chi_u\varphi_v - \varphi_u\chi_v)\psi_{uu} + (\varphi_u\psi_v - \psi_u\varphi_v)\chi_{uu}\},$$

$$M = \frac{1}{A}\{(\psi_u\chi_v - \chi_u\psi_v)\varphi_{uv} + (\chi_u\varphi_v - \varphi_u\chi_v)\psi_{uv} + (\varphi_u\psi_v - \psi_u\varphi_v)\chi_{uv}\},$$

$$N = \frac{1}{A}\{(\psi_u\chi_v - \chi_u\psi_v)\varphi_{vv} + (\chi_u\varphi_v - \varphi_u\chi_v)\psi_{vv} + (\varphi_u\psi_v - \psi_u\varphi_v)\chi_{vv}\}$$