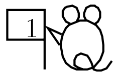
幾何入門　第１０回

情報科学科　金子　晃
Алексей КАНЕНКО
kanenko@is.ocha.ac.jp
この講義のホームページ:
http://www.atom.is.ocha.ac.jp/~kanenko/KOUGI/Geo/geo.html
この講義のホームディレクトリ:
edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo

曲面の基本形式の復習

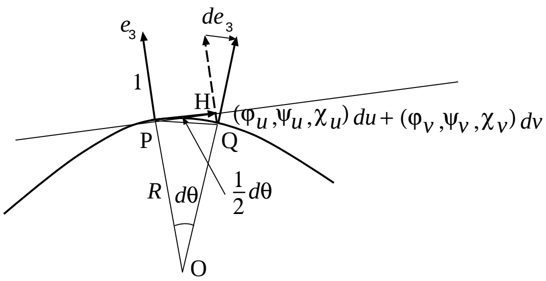


曲面のパラメータ u, v が du, dv だけ動いたときの
曲面上の動き (無限小接ベクトル) $d\vec{r}$ の長さの平方が
曲面の第一基本形式と呼ぶのであった：

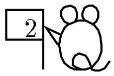
$$\mathrm{I} := |d\vec{r}|^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

曲面上で $d\vec{r}$ だけ動いたときの曲面の単位法線 $\vec{e}_3$ の変化の
接平面成分を曲面の第二基本形式と呼ぶのであった：

$$\mathrm{II} := -d\vec{e}_3 \cdot d\vec{r} = -\frac{\mathrm{I}}{R} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2$$



主曲率



以上より, 二つの二次形式 $\mathrm{I} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$,
$\mathrm{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$ が得られた.
I は正定値だが, II は正定値と限らない.
束縛条件 I$= 1$ の下での II の極値 κ_1, κ_2 を曲面のこの点での主曲率と呼ぶ.
線型代数の復習：

$\mathrm{I} = {}^{(du, dv)} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ は正値対称な二次形式だから,

直交行列 P で対角化でき, 平方根をとることができる：

$${}^tP \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =: \varLambda, \quad \sqrt{\varLambda} := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$$ と置けば

$$\therefore\ {}^t\!\left(P\sqrt{\varLambda}^{-1}\right) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} P\sqrt{\varLambda}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって $\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = P\sqrt{\varLambda}^{-1} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$ と変換すれば, $\mathrm{I} = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$.

よって, 束縛条件 $(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 = 1$ の下での

$$\mathrm{II} = (\theta^1, \theta^2)\,{}^t\!\left(P\sqrt{\varLambda}^{-1}\right) \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \left(P\sqrt{\varLambda}^{-1}\right) \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix} =: (\theta^1, \theta^2) B \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$$

の最大, 最小を求めることに帰着し, それは,
新しい係数行列 B の最大固有値, 最小固有値で与えられる.
これは束縛条件無しの, $\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} = \dfrac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} = -\dfrac{\mathrm{I}}{R}$ の
最大・最小問題と同値. 従って, 法曲率の最大・最小値と一致する.

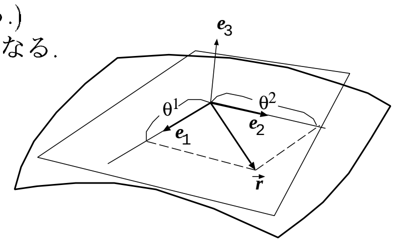
また最大最小は, 行列 B の固有ベクトルに対応するベクトル (θ^1, θ^2) で
実現される.
対称行列の固有ベクトルは互いに直交し, (θ^1, θ^2) 自身が
正規直交標構 $[\vec{e}_1, \vec{e}_2]$ に対する座標成分なので,
最大最小をとる方向は接平面内で互いに直交することも分かる.

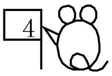
曲面論の基本定理

$\kappa_1\kappa_2$ を Gauss 曲率, $\dfrac{\kappa_1+\kappa_2}{2}$ を平均曲率と呼ぶ.
ともに曲面の性質を表す重要な量である.
しかし, 曲面の自由度は曲線に比べて大きいので,
この二つの函数だけでは曲面の合同類は決まらない.

曲面論の基本定理は,“ 二つの二次対称微分形式が与えられたとき,
それがある基本関係式を満たせば, それらを第一, 第二基本形式とする曲面が
合同を除いてただ一つ定まる ”という形をしている.
以下, 基本関係式を説明するため, 記号を導入する.

先に定めた θ^1, θ^2 に対して, 接平面の正規直交基底 $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ を
$d\vec{r}=\theta^1\vec{e}_1+\theta^2\vec{e}_2$, かつ $\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\vec{e}_3$ となるような向きに選ぶ.
(ピタゴラスの定理により一意に定まる.)
$\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ はこの点での標構 (frame) となる.





ここで

$$d\vec{e}_i = \omega_i^1 \vec{e}_1 + \omega_i^2 \vec{e}_2 + \omega_i^3 \vec{e}_3 \qquad (\omega_i^j \text{ は } du, dv \text{ のある一次微分形式})$$

と置くと, $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ より

$$d\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j + \vec{e}_i \cdot d\vec{e}_j = 0 \quad \therefore \quad \omega_i^j = -\omega_j^i. \ \text{特に } \omega_i^i = 0.$$

よって $d^2\vec{r} = 0$ から

$$\begin{aligned}0 = d^2\vec{r} &= d(\theta^1 \vec{e}_1 + \theta^2 \vec{e}_2) = d\theta^1 \vec{e}_1 - \theta^1 \wedge d\vec{e}_1 + d\theta^2 \vec{e}_2 - \theta^2 \wedge d\vec{e}_2 \\ &= d\theta^1 \vec{e}_1 - \theta^1 \wedge (\omega_1^2 \vec{e}_2 + \omega_1^3 \vec{e}_3) + d\theta^2 \vec{e}_2 - \theta^2 \wedge (\omega_2^1 \vec{e}_1 + \omega_2^3 \vec{e}_3) \\ &= (d\theta^1 - \theta^2 \wedge \omega_2^1)\vec{e}_1 + (d\theta^2 - \theta^1 \wedge \omega_1^2)\vec{e}_2 - (\theta^1 \wedge \omega_1^3 + \theta^2 \wedge \omega_2^3)\vec{e}_3\end{aligned}$$

$$\therefore \quad d\theta^1 = \theta^2 \wedge \omega_2^1, \quad d\theta^2 = \theta^1 \wedge \omega_1^2 \qquad \textbf{(曲面の第一構造方程式)}$$

また $\theta^1 \wedge \omega_1^3 + \theta^2 \wedge \omega_2^3 = 0$ も分かる.

他方, $\mathrm{II} = -d\vec{e}_3 \cdot d\vec{r} = -(\omega_3^1 \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2) \cdot (\theta^1 \vec{e}_1 + \theta^2 \vec{e}_2) = \omega_1^3 \theta^1 + \omega_2^3 \theta^2$

よって $\omega_1^3 = b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2, \quad \omega_2^3 = b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2$ と置くと,

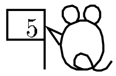
$\theta^1 \wedge \omega_1^3 + \theta^2 \wedge \omega_2^3 = 0$ より

$$\begin{aligned}0 &= \theta^1 \wedge (b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2) + \theta^2 \wedge (b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2) \\ &= (b_{12} - b_{21})\theta^1 \wedge \theta^2 \qquad \therefore \quad b_{12} = b_{21}\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{II} = b_{11}(\theta^1)^2 + 2b_{12}\theta^1\theta^2 + b_{22}(\theta^2)^2 = (\theta^1, \theta^2) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$$

故に, 主曲率はこの行列の固有値である.



次に，$d^2\vec{e}_2 = 0$ より，

$$
\begin{aligned}
0 &= d(\omega^1_2\vec{e}_1 + \omega^3_2\vec{e}_3) = d\omega^1_2\vec{e}_1 - \omega^1_2 \wedge d\vec{e}_1 + d\omega^3_2\vec{e}_3 - \omega^3_2 \wedge d\vec{e}_3 \\
&= d\omega^1_2\vec{e}_1 - \omega^1_2 \wedge (\omega^2_1\vec{e}_2 + \omega^3_1\vec{e}_3) + d\omega^3_2\vec{e}_3 - \omega^3_2 \wedge (\omega^1_3\vec{e}_1 + \omega^2_3\vec{e}_2) \\
&= (d\omega^1_2 - \omega^3_2 \wedge \omega^1_3)\vec{e}_1 - (\omega^1_2 \wedge \omega^2_1 + \omega^3_2 \wedge \omega^2_3)\vec{e}_2 + (d\omega^3_2 - \omega^1_2 \wedge \omega^3_1)\vec{e}_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad d\omega^1_2 &= \omega^3_2 \wedge \omega^1_3 = \omega^3_1 \wedge \omega^3_2 = (b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2) \wedge (b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2) \\
&= (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\theta^1 \wedge \theta^2
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad d\omega^1_2 = K\theta^1 \wedge \theta^2,\quad K = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$ **(曲面の第二構造方程式)**

また $d\omega^3_2 = \omega^1_2 \wedge \omega^3_1$ 同様に $d^2\vec{e}_1 = 0$ を計算して $d\omega^3_1 = \omega^2_1 \wedge \omega^3_2$

最後の二式から b_{ij} が満たすべき微分方程式を求める．
まず $d\omega^3_1 = \omega^2_1 \wedge \omega^3_2$ より

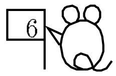
$$d(b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2) = \omega^2_1 \wedge (b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2)$$

ここで左辺は第一構造方程式を用いて

$$
\begin{aligned}
&= db_{11} \wedge \theta^1 + b_{11}d\theta^1 + db_{12} \wedge \theta^2 + b_{12}d\theta^2 \\
&= db_{11} \wedge \theta^1 + b_{11}\theta^2 \wedge \omega^1_2 + db_{12} \wedge \theta^2 + b_{12}\theta^1 \wedge \omega^2_1
\end{aligned}
$$

と変形できるから，これから右辺を引いて共通因子をまとめれば

$$(db_{11} - b_{12}\omega^2_1 - b_{21}\omega^2_1) \wedge \theta^1 + (db_{12} - b_{11}\omega^1_2 - b_{22}\omega^2_1) \wedge \theta^2 = 0$$



同様に $d\omega_2^3 = \omega_2^1 \wedge \omega_1^3 = \omega_2^1 \wedge (b_{11}\theta^1 + b_{12}\theta^2)$ から,

$$\begin{aligned}
d\omega_2^3 &= d(b_{21}\theta^1 + b_{22}\theta^2) \\
&= db_{21} \wedge \theta^1 + b_{21} d\theta^1 + db_{22} \wedge \theta^2 + b_{22} d\theta^2 \\
&= db_{21} \wedge \theta^1 + b_{21}\theta^2 \wedge \omega_2^1 + db_{22} \wedge \theta^2 + b_{22}\theta^1 \wedge \omega_1^2
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (db_{21} - b_{22}\omega_1^2 - b_{11}\omega_2^1) \wedge \theta^1 + (db_{22} - b_{21}\omega_2^1 - b_{12}\omega_2^1) \wedge \theta^2 = 0$$

よって今

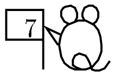
$$\begin{aligned}
&db_{11} - b_{12}\omega_1^2 - b_{21}\omega_1^2 = b_{11,1}\theta^1 + b_{11,2}\theta^2, \\
&db_{12} - b_{11}\omega_2^1 - b_{22}\omega_1^2 = b_{12,1}\theta^1 + b_{12,2}\theta^2, \\
&db_{21} - b_{22}\omega_1^2 - b_{11}\omega_2^1 = b_{21,1}\theta^1 + b_{21,2}\theta^2, \\
&db_{22} - b_{21}\omega_2^1 - b_{12}\omega_2^1 = b_{22,1}\theta^1 + b_{22,2}\theta^2
\end{aligned}$$

と置くと, これらの係数は, 上に代入して次を満たすことが分かる：

$$b_{11,2} = b_{12,1},\ b_{21,2} = b_{22,1} \ (\textbf{Mainardi-Codazzi の方程式})$$

$b_{12} = b_{21}$ だったから, $db_{12} = db_{21}$, 従って $b_{12,1} = b_{21,1}$, $b_{12,2} = b_{21,2}$ も云える.
よって, $b_{ij,k}$ は三つの添え字に関して対称である.

曲面論の基本定理



二つの二次対称微分形式 I, II が与えられ, I は正定値のとき,
これらを第一, 第二基本形式とする曲面が存在するための必要十分条件は,
一次微分形式 θ^1, θ^2 を

$$\mathrm{I} = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2,\ \ \mathrm{II} = \sum_{i,j=1,2} b_{ij}\theta^i\theta^j \qquad (b_{ij} = b_{ji})$$

と表せるようにとったとき,

$$d\theta^i = -\sum_{j=1}^{2} \omega^i_j \wedge \theta^j,\ \ \omega^i_j = -\omega^j_i,\ \ i, j = 1, 2$$

なる条件で一意に定まる一次微分形式 ω^j_i が

$$d\omega^1_2 = (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})\theta^1 \wedge \theta^2 \qquad (\text{第二構造方程式})$$

を満たし, また db_{ij} の計算から先のように定まる $b_{ij,k}$ が

$$b_{ij,k} = b_{ik,j},\ \ i, j, k = 1, 2 \qquad (\text{Mainardi-Codazzi の方程式})$$

を満たすことである.

このとき, 曲面は合同を除いてただ一つに定まる.

証明の粗筋： θ^1, θ^2 から上のような ω_i^j が一意に定まることは
θ^1, θ^2 が曲面上の各点で共変ベクトルの基底を成すので
$d\theta^1 = a\theta^1 \wedge \theta^2$, $d\theta^2 = b\theta^1 \wedge \theta^2$ と一意に書け,
従って, $\omega_1^1 = \omega_2^2 = 0$, $\omega_1^2 = a\theta^1 + b\theta^2 = -\omega_2^1$ であることから分かる.
次に, これらが上の条件を満たすとき,

$$d\vec{r} = \theta^1 \vec{e}_1 + \theta_2 \vec{e}_2, \ \ d\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_i^j d\vec{e}_j, \ \ i = 1, 2, 3, \ \ \vec{e}_3 = \vec{e}_1 \times \vec{e}_2$$

を満たす $\vec{r}$, $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$ を求める.
これは２変数 u, v の連立偏微分方程式となり,
上の条件がその積分可能条件となっているので, 次の定理より
初期条件を適当に定めれば, 一意に解ける (帰着の詳細は略)：

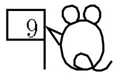
Frobenius の定理： ω_i, $i = 1, \ldots, k$ を一次微分形式とする
連立一階全微分方程式 (Pfaff 系) $\omega_i = 0$, $i = 1, \ldots, k$ が積分可能
i.e. $\exists F_i(x)$, $i = 1, \ldots, k$ s.t. $\langle \omega_1, \ldots, \omega_k \rangle = \langle dF_1, \ldots, dF_k \rangle$ となる
$\Longleftrightarrow$ $\exists \omega_i^j$, $i, j = 1, \ldots, k$ s.t. $d\omega_i = \sum_{j=1}^{k} \omega_i^j \wedge \omega_j$.

最後の条件を積分可能条件 (integrability condition) と呼ぶ.

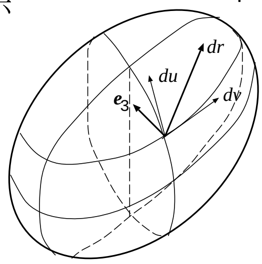
一般に, 微分幾何の問題は偏微分方程式を解くことに帰着するものが多く,
偏微分方程式論の発展の重要な動機の一つとなってきた.
Frobenius の定理もその基本的なものの一つである.

Frobenius の定理は $k = 1$. すなわち方程式 1 個のときも自明ではない：
1 次微分形式 ω に対し, 函数 a を適当に選べば,
$a\omega = dF$ となるような函数 F が見付かるための必要十分条件は
$d\omega = \eta \wedge \omega$ なる 1 次微分形式 η が存在すること.
この条件は 2 次元では自明に満たされる (1 階常微分方程式は局所的に解がある.)

例：楕円面



普通の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ だが, パラメータ表示



$\vec{r}=(a\cos u\cos v, b\cos u\sin v, c\sin u)$ を使って計算：

$$
\begin{aligned}
d\vec{r} &= (-a\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, c\cos u)du \\
&\quad + (-a\cos u\sin v, +b\cos u\cos v, 0)dv \\
&= (-a\sin u\cos v du - a\cos u\sin v dv, \\
&\quad - b\sin u\sin v du + b\cos u\cos v dv, \\
&\quad c\cos u du)
\end{aligned}
$$

よって第一基本形式は

$$
\begin{aligned}
|d\vec{r}|^2 &= (-a\sin u\cos v du - a\cos u\sin v dv)^2 \\
&\quad + (-b\sin u\sin v du + b\cos u\cos v dv)^2 \\
&\quad + (c\cos u du)^2 \\
&= \{(a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v)\sin^2 u + c^2\cos^2 u\}du^2 \\
&\quad + 2(a^2-b^2)\cos u\sin u\cos v\sin v du dv \\
&\quad + (a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v)\cos^2 u dv^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{n} &= (-bc\cos^2 u\cos v, -ac\cos^2 u\sin v, -ab\cos u\sin u) \\
&= (-bc\cos u\cos v, -ac\cos u\sin v, -ab\sin u)\cos u,
\end{aligned}
$$

$$
A=|\vec{n}|=\sqrt{c^2(b^2\cos^2 v + a^2\sin^2 v)\cos^2 u + a^2b^2\sin^2 u}\cos u =: \Delta\cos u
$$

$$
\begin{aligned}
d(\vec{n}/\cos u) &= (bc\sin u\cos v du + bc\cos u\sin v dv, \\
&\quad ac\sin u\sin v du - ac\cos u\cos v dv, \\
&\quad - ab\cos u du)
\end{aligned}
$$

$$
\vec{e}_3=\frac{\vec{n}}{A}=\frac{\vec{n}/\cos u}{\Delta},
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} &= -d\vec{e}_3\cdot d\vec{r} = -d\left(\frac{(\vec{n}/\cos u)}{\Delta}\right)\cdot d\vec{r} = -\frac{d(\vec{n}/\cos u)\cdot d\vec{r}}{\Delta} \\
&= -\frac{abc}{\Delta}\{(\sin u\cos v du + \cos u\sin v dv)(-\sin u\cos v du - \cos u\sin v dv) \\
&\quad + (-\sin u\sin v du + \cos u\cos v dv)(\sin u\sin v du - \cos u\cos v dv) \\
&\quad - \cos u du\cos u du\} \\
&= \frac{abc}{\Delta}(du^2 + \cos^2 u dv^2)
\end{aligned}
$$

$$\mathrm{I} = \{(a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v)\sin^2 u + c^2\cos^2 u\}du^2$$
$$+ 2(a^2 - b^2)\cos u \sin u \cos v \sin v du dv$$
$$+ (a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v)\cos^2 u dv^2$$

$$\mathrm{II} = \frac{abc}{\Delta}(du^2 + \cos^2 u dv^2)$$

主曲率 κ_1, κ_2 は $\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$ の極値として求まる.

この例では II が対角型なので, II を単位行列にして, 分母の極値を求める

i.e. $du, \cos u dv$ を二次形式の独立変数とするのが楽.

結局, $\dfrac{abc}{\Delta}\dfrac{1}{\kappa_1}$, $\dfrac{abc}{\Delta}\dfrac{1}{\kappa_2}$ が次の行列の固有値：

$$C = \begin{pmatrix} (a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v)\sin^2 u + c^2\cos^2 u & (a^2 - b^2)\sin u \cos v \sin v \\ (a^2 - b^2)\sin u \cos v \sin v & a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v \end{pmatrix}$$

これより $\dfrac{1}{\kappa_1\kappa_2} = \left(\dfrac{\Delta}{abc}\right)^2 \det C = \left(\dfrac{\Delta}{abc}\right)^2 \cdot \Delta^2$

$\therefore$ $K = \kappa_1\kappa_2 = \dfrac{a^2b^2c^2}{\Delta^4}$,

また $\dfrac{1}{\kappa_1} + \dfrac{1}{\kappa_2}$

$$= \frac{\Delta}{abc}\{(a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v)\sin^2 u + c^2\cos^2 u + a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v\}$$

$\therefore$ $H = \dfrac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\kappa_1} + \dfrac{1}{\kappa_2}\right)K$

$$= \frac{abc\{(a^2 + b^2 + c^2) - (a^2\cos^2 u\cos^2 v + b^2\cos^2 u\sin^2 v + c^2\sin^2 u)\}}{2\Delta^3}$$

$$= \frac{abc\{(a^2 + b^2 + c^2) - (x^2 + y^2 + z^2)\}}{2\Delta^3}$$

ちなみに $\Delta = abc\left(\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}\right)^{1/2}$

従って特に, 頂点 $(a, 0, 0)$ では, $\Delta = bc$ で, $\kappa_1\kappa_2 = \dfrac{a^2}{b^2c^2}$, $\kappa_1 + \kappa_2 = \dfrac{a}{b^2} + \dfrac{a}{c^2}$,

よって $\kappa_1 = \dfrac{a}{b^2}$, $\kappa_2 = \dfrac{a}{c^2}$ $\quad (b \geq c)$

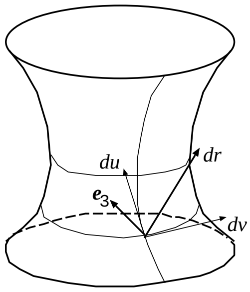
例：単葉双曲面

普通の方程式は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ だが

パラメータ表示

$\vec{r}=(a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u)$

を使って計算する.



$$
\begin{aligned}
d\vec{r} &= (a\sinh u\cos v, b\sinh u\sin v, c\cosh u)du \\
&\quad + (-a\cosh u\sin v, +b\cosh u\cos v, 0)dv \\
&= (-a\sinh u\cos vdu - a\cosh u\sin vdv, \\
&\quad - b\sinh u\sin vdu + b\cosh u\cos vdv, \\
&\quad c\cosh udu)
\end{aligned}
$$

よって第一基本形式は

$$
\begin{aligned}
|d\vec{r}|^2 &= (-a\sinh u\cos vdu - a\cosh u\sin vdv)^2 \\
&\quad + (-b\sinh u\sin vdu + b\cosh u\cos vdv)^2 \\
&\quad + (c\cosh udu)^2 \\
&= \{(a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v)\sinh^2 u + c^2\cosh^2 u\}du^2 \\
&\quad + 2(a^2-b^2)\cosh u\sinh u\cos v\sin vdudv \\
&\quad + (a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v)\cosh^2 udv^2
\end{aligned}
$$

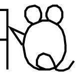
$\vec{n}=(-bc\cosh^2 u\cos v, -ac\cosh^2 u\sin v, ab\cosh u\sinh u)$,

$A=|\vec{n}|=\sqrt{c^2(b^2\cos^2 v+a^2\sin^2 v)\cosh^2 u+a^2b^2\sinh^2 u}\cosh u =: \mathit{\Delta}\cosh u$

$$
\begin{aligned}
d(\vec{n}/\cosh u) &= (-bc\sinh u\cos vdu + bc\cosh u\sin vdv, \\
&\quad - ac\sinh u\sin vdu - ac\cosh u\cos vdv, \\
&\quad ab\cosh udu)
\end{aligned}
$$

$\vec{e}_3=\dfrac{\vec{n}}{A}=\dfrac{\vec{n}/\cosh u}{\mathit{\Delta}}$,

$\mathrm{II}=-d\vec{e}_3\cdot d\vec{r}=-\dfrac{d(\vec{n}/\cosh u)\cdot d\vec{r}}{\mathit{\Delta}}=\dfrac{abc}{\mathit{\Delta}}(du^2-\cosh^2 udv^2)$



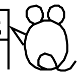
$$\mathrm{I} = \{(a^2\cos^2 v + b^2\sin^2 v)\sinh^2 u + c^2\cosh^2 u\}du^2$$
$$+ 2(a^2 - b^2)\cosh u \sinh u \cos v \sin v du dv$$
$$+ (a^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v)\cosh^2 u dv^2$$
$$\mathrm{II} = \frac{abc}{\Delta}(du^2 - \cosh^2 u dv^2)$$

主曲率 κ_1, κ_2 は $\dfrac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}}$ の極値として求まる.
この例では II が対角型だが正定値でないので, 先の簡便法は使えない.
地道に計算すると,

$$K = -\frac{a^2b^2c^2}{\Delta^4},$$
$$H = \frac{abc\{(a^2\cosh^2 u\cos^2 v + b^2\cosh^2 u\sin^2 v + c^2\sinh^2 u) - (a^2 + b^2 - c^2)\}}{2\Delta^3}$$
$$= \frac{abc\{(x^2 + y^2 + z^2) - (a^2 + b^2 - c^2)\}}{2\Delta^3}$$

ちなみに $\Delta = abc\left(\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4} + \dfrac{z^2}{c^4}\right)^{1/2}$

従って特に, 頂点 $(a, 0, 0)$ では, $\Delta = bc$ で, $\kappa_1\kappa_2 = -\dfrac{a^2}{b^2c^2}$, $\kappa_1 + \kappa_2 = \dfrac{a}{b^2} - \dfrac{a}{c^2}$,
よって $\kappa_1 = -\dfrac{a}{c^2}$, $\kappa_2 = \dfrac{a}{b^2}$



レポート問題

問題 9 次の曲面の第一, 第二基本形式と Gauss 曲率, 平均曲率を計算せよ.

1) 双曲放物面 $z = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}$

パラメータ表示で $x = \dfrac{a(u+v)}{2}$, $y = \dfrac{b(u-v)}{2}$, $z = uv$

2) 輪環面 $(b - \sqrt{x^2+y^2})^2 + z^2 = a^2 \quad (b > a)$

パラメータ表示で $x = (b - a\cos u)\cos v$, $y = (b - a\cos u)\sin v$, $z = a\sin u$

問題 10 単葉双曲面と双曲放物面の上には直線の 1 パラメータ族が載っていることを示せ.