幾何入門　第１１回

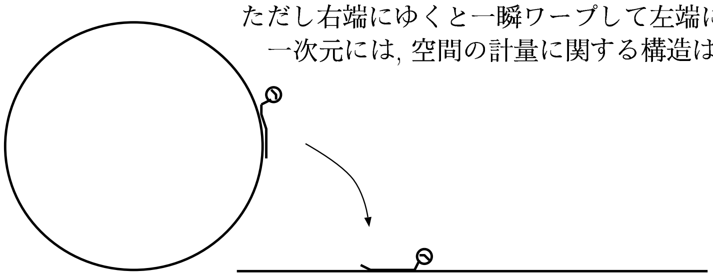
情報科学科　金子　晃
Алексей　КАНЕНКО
kanenko@is.ocha.ac.jp
この講義のホームページ:
http://www.atom.is.ocha.ac.jp/~kanenko/KOUGI/Geo/geo.html
この講義のホームディレクトリ:
edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo

第６章　Riemann 幾何学

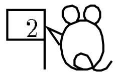
３次元空間内の曲面や曲線の曲がり方の考察は, 普通は
今まで述べて来たような, 曲面を外から見たときの曲がり具合のこと

しかし, 曲面の上で生活している生物にとっては, 自分の空間の曲がり具合は
これとは別の感じ方になる.

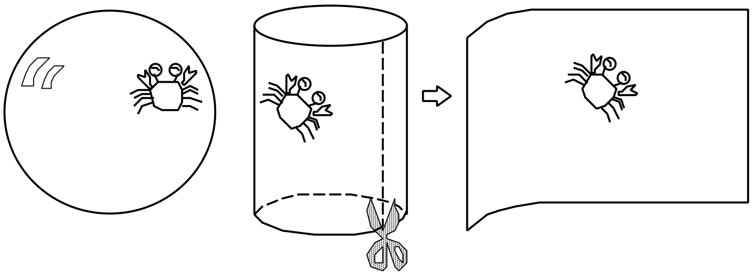
例：　一次元の国では,
円周 $S = \{x^2 + y^2 = 1$ は外から (i.e. 平面曲線として) 見ると曲率を有する.
しかし, 円周の上に閉じ込められて外の世界が見えない生物にとっては,
自分の世界は少しも曲がっていない.
線分 $[0, 2\pi]$ の両端点を同一視したものと全く同じ.
ただし右端にゆくと一瞬ワープして左端に居る.
一次元には, 空間の計量に関する構造は何もない.

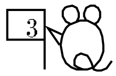


例：３次元の中の曲面の場合,



球面上に生活する生物は,
たといその外の３次元の世界から自分達の国を眺める機会が無くても,
自分達の世界が曲がっていることが感じられる.
例えば, ３角形の内角の和を計算すると π より大きくなることが観察できる.
これに対し, 円柱の表面は３次元から見ると曲がっているが, その上の生物は
平らな面の上で暮らしていると思うだろう.





３次元空間内の曲面については,
第一基本形式よりも第二基本形式の方が
曲面の曲がり具合を良く表しているように見えたが,
曲面に固有な曲がり方を表すのは, むしろ第一基本形式, すなわち弧長の方である.

一般に, n 次元の C^∞ 級多様体 M があるとき,
その上の正値対称２次微分形式

$$\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)dx^i dx^j \qquad (g_{ij} = g_{ji})$$

を M 上の **Riemann 計量**と呼ぶ.
座標変換は２次共変対称テンソルとして扱う.

これは M 上に距離を定める：

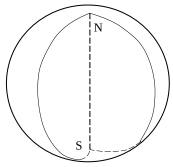
線素： $(ds)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)dx^i dx^j$,
曲線弧 $x = \varphi(t)$, $0 \leq t \leq T$ の長さ (道のり) は

$$L = \int_0^T \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}}dt$$

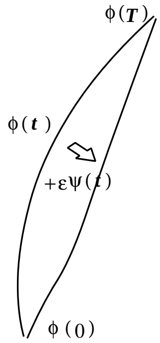
それでは, M 上の二点 P, Q の距離を, 測る経路を指定せずに定められるか？

測地線

M 上の二点 P, Q を決めたとき, これらを結ぶ M 上の最短曲線弧のことをこれらの点を通る**測地線 (geodesic)** と呼ぶ.
測地線に沿って測った長さが二点 P, Q の**距離**である.



ある曲線が測地線かどうかは局所的に定まる.
(逆に測地線は最長弧になることも有る.)
測地線の例は球面上の大円弧 (geodesic の語源！)
二点 P, Q が十分に近ければ, 最短経路は短い方の大円弧に決まる.
北極と南極の場合は無数に有る $\Longrightarrow$ 大域理論は難しい.



そこで, まず局所理論をやる.
以下, 曲線弧の両端点 P, Q は同一座標近傍内にあるとする.

二点 P, Q を時刻 $t=0$, $t=T$ で通過するすべての径路の中で, 長さが最短のものを $x=\varphi(t)$ とする.
このとき, $\psi(0)=\psi(T)=0$ なる任意の函数ベクトル $\psi(t)$ と任意の ε に対し,

$$\varphi(t) \quad (0 \le t \le T) \text{ に沿う長さ}$$
$$\le \ \varphi(t)+\varepsilon\psi(t) \quad (0 \le t \le T) \text{ に沿う長さ}$$

i.e.

$$\int_0^T \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}}dt$$

$$\leq \int_0^T \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t)+\varepsilon\psi(t))\frac{d(\varphi^i(t)+\varepsilon\psi^i(t))}{dt}\frac{d(\varphi^j(t)+\varepsilon\psi^j(t))}{dt}}dt$$

$$= \int_0^T \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}+\varepsilon\Big(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\psi^k+\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\psi^j}{dt}+\sum_{i,j=1}^n g_{ij}\frac{d\varphi^j}{dt}\frac{d\psi^i}{dt}\Big)+o(\varepsilon)dt}$$

$$= \int_0^T \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}}dt$$

$$+\,\varepsilon\int_0^T \frac{\sum_{i,j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\psi^k+\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\psi^j}{dt}+\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^j}{dt}\frac{d\psi^i}{dt}}{2\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}}}dt$$

$$+\,o(\varepsilon)$$

ここで対称性 $g_{ij}=g_{ji}$ を用いて分子の最後の二つの項をまとめると

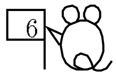
$$= \int_0^T \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}}dt$$

$$+\,\varepsilon\int_0^T \frac{\sum_{i,j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}\psi^k(t)+2\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\psi^j(t)}{dt}}{2\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}}}dt$$

$$+\,o(\varepsilon)$$

任意符号を持つ微小な ε に対しこの不等式が常に成り立つためには,
ε の一次項の係数 (変分) が消えなければならない：

$\Delta := \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\varphi(t))\frac{d\varphi^i(t)}{dt}\frac{d\varphi^j(t)}{dt}}$ と置けば



$$\int_0^T \Big(\frac{1}{2\Delta}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\psi^k + \frac{1}{\Delta}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\psi^j}{dt}\Big)dt = 0$$

これが任意の $\psi(t)$ について成立より $\varphi(t)$ が満たす条件を求める.
括弧内の第２項において動く添え字 j を k に書き換え,
更に $\psi(t)$ についた微分を部分積分で移す $(\psi(0) = \psi(T) = 0$ に注意)：

$$\int_0^T \Big\{\frac{1}{2\Delta}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}\psi^k - \sum_{i,k=1}^{n}\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{\Delta}g_{ik}\frac{d\varphi^i}{dt}\Big)\psi^k\Big\}dt$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\int_0^T \Big\{\frac{1}{2\Delta}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} - \sum_{i}^{n}\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{\Delta}g_{ik}\frac{d\varphi^i}{dt}\Big)\Big\}\psi^k dt$$
$$= 0$$

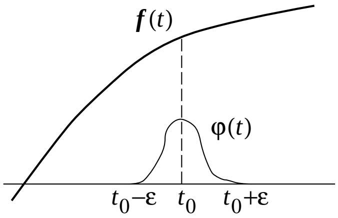
$\psi^k(t)$ は $\psi^k(0) = \psi^k(T) = 0$ を満たす以外は任意の函数だから,
変分法の基本原理により, 被積分函数のそれに掛かっている部分 $\{\ \} = 0$.

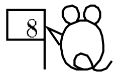
Q 変分法の基本原理：連続函数 $f(t)$ が $\psi(0)=\psi(T)=0$ なる任意の C^∞ 級函数 $\psi(t)$ に対して

$$\int_0^T f(t)\psi(t)dt = 0$$

を満たすなら, $f(t)\equiv 0$.

$\because$ 例えば $f(t_0)>0$ とすると, $t_0-\varepsilon \le t \le t_0+\varepsilon$ で $f(t)>0$.
そこで, $\psi(t)\ge 0$ を $\psi(t_0)>0$ かつこの区間の外では 0 となるように選べば,
上の積分値 >0 となり, 仮定に反する.





∴

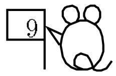
$$\frac{1}{2\Delta}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}-\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{\Delta}g_{ik}\frac{d\varphi^i}{dt}\Big)=0,\qquad k=1,2,\ldots,n$$

これは変分法の一般論で **Euler-Lagrange の微分方程式**と呼ばれるもの
このまま計算を続けるのはものすごく大変なので, 普通は次のように工夫する：
我々が求めているのは曲線の跡であって, パラメータ表示までは決まらない.
(パラメータを取り替えても曲線の弧長は変わらないから！)
そこで, パラメータは弧長パラメータの定数倍と仮定してしまう.
(弧長パラメータ自身にしてしまうと, パラメータの両端点 0 と T を
固定して比較できなくなるので, 弧長に比例すると仮定するのである.)
すると, 各曲線上で, 曲線に応じて定まる定数 C が有って,
$ds=\Delta dt=C dt \quad \text{i.e.} \quad \Delta=C$　(曲線に沿って定数)
よって上の式で Δ は $\dfrac{d}{dt}$ をすり抜けて外に出るので,

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}-\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\Big(g_{ik}\frac{d\varphi^i}{dt}\Big)=0$$

従って

$$\sum_{i=1}^{n}g_{ik}\frac{d^2\varphi^i}{dt^2}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt},\qquad k=1,2,\ldots,n$$



$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} g_{ik}\frac{d^2\varphi^i}{dt^2} &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} - \sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\Big)\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}, \qquad k = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

ここで, 行列 (g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) と置き, 左から掛ける, すなわち,
上の式の両辺に g^{kl} を掛けて $k = 1, \ldots, n$ について加えれば,

$$
\frac{d^2\varphi^l}{dt^2} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} g^{kl}\Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\Big)\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt}, \qquad l = 1, \ldots, n
$$

Riemann 幾何学では,

$$
\Gamma_{k,ij} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\Big), \qquad \Gamma^l_{ij} := \textstyle\sum_{k=1}^{n} g^{kl}\Gamma_{k,ij}
$$

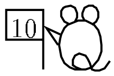
と置き, **Christoffel の 3 添字記号**と呼ぶ (テンソルではない).
対称性 :

$$
\Gamma_{k,ij} = \Gamma_{k,ji}, \quad \Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}
$$

この記号を使うと, 測地線の方程式は (最終的に l を k と書き直して)

$$
\frac{d^2\varphi^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n}\Gamma^k_{ij}\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{d\varphi^j}{dt} = 0, \qquad k = 1, \ldots, n
$$

という連立常微分方程式になる.
Γ^k_{ij} にも $x = \varphi(t)$ が代入されるので, これは
猛烈に複雑な非線型連立方程式であり, めったに解けない!

Q 測地線の常微分方程式は, $\varphi(0)$ と $\varphi'(0)$ を初期値として


与えれば, 解が少なくとも局所的には一意に定まる.
我々はこの方程式を, パラメータ t が弧長に比例すると仮定して導いたが,
この方程式の勝手な解はその条件を満たしているであろうか？

$$\frac{d}{dt}\Delta^2 = \frac{d}{dt}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\varphi(t))\dot{\varphi}^i(t)\dot{\varphi}^j(t)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{\varphi}^i(t)\dot{\varphi}^j(t)\dot{\varphi}^k(t) + \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\ddot{\varphi}^i(t)\dot{\varphi}^j(t) + \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\dot{\varphi}^i(t)\ddot{\varphi}^j(t)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\dot{\varphi}^i(t)\dot{\varphi}^j(t)\dot{\varphi}^k(t)$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\sum_{k,l=1}^{n} \Gamma^i_{kl}\dot{\varphi}^k(t)\dot{\varphi}^l(t)\dot{\varphi}^j(t) - \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\sum_{k,l=1}^{n} \Gamma^j_{kl}\dot{\varphi}^k(t)\dot{\varphi}^l(t)\dot{\varphi}^i(t)$$

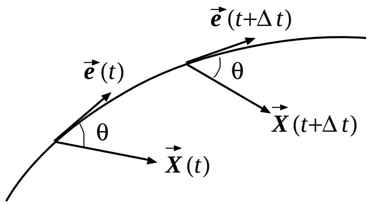
$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \Bigl(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \sum_{l=1}^{n} g_{lj}\Gamma^l_{ki} - \sum_{l=1}^{n} g_{il}\Gamma^l_{kj}\Bigr)\dot{\varphi}^i(t)\dot{\varphi}^j(t)\dot{\varphi}^k(t)$$

ここで ( ) 内は

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{j,ki} - \Gamma_{i,kj}$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\Bigr) - \frac{1}{2}\Bigl(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i}\Bigr) = 0$$

Levi-Civita 接続




Tullio Levi-Civita
(1873–1941)

測地線を手がかりに, 空間のねじれ具合を読み取る.
測地線が直線だと思うと, 測地線の接線はすべて互いに平行なはずである.
今, 測地線 $\varphi(t)$ に沿うベクトルの平行移動作用素を $\tau(t)$ と書くと,
ベクトル場 $X=\sum_{i=1}^{n}\xi^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ の測地線に沿う変化率は, $Y=\varphi'(0)$ として

$$\nabla_Y X := \lim_{t\to 0}\frac{\tau(t)^{-1}X(\varphi(t))-X(\varphi(0))}{t}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{d\xi^i(\varphi(t))}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{i=1}^{n}\xi^i\lim_{t\to 0}\frac{\tau(t)^{-1}\frac{\partial}{\partial x^i}-\frac{\partial}{\partial x^i}}{t}$$

最後の極限は, X の変化ではなく, 空間のねじれに起因する. 今, これを

$$\lim_{t\to 0}\frac{\tau(t)^{-1}\frac{\partial}{\partial x^i}-\frac{\partial}{\partial x^i}}{t}=\sum_{k=1}^{n}A_i^k\frac{\partial}{\partial x^k}$$

と置き, 未定係数法で A_i^k を決定する.

仮定により, $X=\varphi'(t)=\sum_{i=1}^{n}\dot{\varphi}^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$ が測地線の接線ベクトルのときは

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\tau(t)^{-1}X(\varphi(t))-X(\varphi(0))}{\Delta t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{d\dot{\varphi}^i(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_{i,k=1}^{n}\dot{\varphi}^iA_i^k\frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\ddot{\varphi}^k(t)\frac{\partial}{\partial x^k}+\sum_{i,k=1}^{n}\dot{\varphi}^iA_i^k\frac{\partial}{\partial x^k}=0$$

$\therefore\quad \ddot{\varphi}^k(t) + \sum_{i=1}^{n} \dot{\varphi}^i A_i^k = 0, \qquad k = 1, \ldots, n$

これを測地線の方程式と比較して

$\therefore\quad \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \dot{\varphi}^i \dot{\varphi}^j = \sum_{i=1}^{n} \dot{\varphi}^i A_i^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$

これが, 任意の測地線 $\varphi(t)$ について成り立つような A_i^k は無数に有るが,
A_i^k の $\dot{\varphi}$ に関する一次部分もまた上を満たすので,
最初から $A_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k \dot{\varphi}^j$ と仮定するのが自然.
ここで a_{ij}^k を, i, j について対称と仮定すると, $a_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$ に確定する.
従って,

$$
\begin{aligned}
\nabla_Y X &= \sum_{k=1}^{n} \frac{d\xi^k(\varphi(t))}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i,j,k=1}^{n} \xi^i \Gamma_{ij}^k \dot{\varphi}^j(0) \frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \dot{\varphi}^j(0) \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i,j,k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \xi^i \dot{\varphi}^j(0) \frac{\partial}{\partial x^k}
\end{aligned}
$$

$Y = \dot{\varphi}(0)$ は任意のベクトル場 $\sum_{j=1}^{n} \eta^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ としてよいから,

$$
\nabla_Y X = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \eta^j \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{i,j,k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \xi^i \eta^j \frac{\partial}{\partial x^k}
$$

これをベクトル場 X のベクトル場 Y に沿う共変微分と呼ぶ.
特に,

$$
\nabla_{\partial/\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}
$$

これが Christoffel 記号の意味である.

Riemann 多様体の曲率

Riemann 計量 $\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx^i dx^j$ が与えられた多様体を
Riemann 多様体と呼ぶ.
Riemann 計量が対角型 $(dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2$ でない
$\Longleftrightarrow$ 空間がゆがんでいる.
Riemann 計量から, 空間の曲がり具合を表すテンソルが誘導される：

$$R^l{}_{ijk} := \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ji}}{\partial x^k} + \sum_{m=1}^{n} (\Gamma^l_{jm} \Gamma^m_{ki} - \Gamma^l_{km} \Gamma^m_{ji}) \quad \text{(曲率テンソル)}$$

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{n} R^k{}_{ikj} \quad \text{(Ricci 曲率)}$$

$$R = \sum_{k=1}^{n} R_{kk} \quad \text{(スカラー曲率)}$$

特に, M が $\boldsymbol{R}^3$ 内の曲面で, g が $\boldsymbol{R}^3$ の Euclid 距離から
自然に誘導された計量のときは, $R = 2K$ となる.
このように座標成分で書くと, テンソルになることを調べるだけで大変！