

幾何入門 第12回



情報科学科 金子 晃

А л е к с е й К А Н Е Н К О

kanenko@is.ocha.ac.jp

この講義のホームページ:

<http://www.atom.is.ocha.ac.jp/~kanenko/KOUGI/Geo/geo.html>

この講義のホームディレクトリ:

edusv.edu.is.ocha.ac.jp/~kanenko/Geo

復習

Riemann 計量：曲がった空間の距離 (弧長) 要素：

$$\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) dx^i dx^j \quad (g_{ij} = g_{ji})$$

Riemann 多様体の測地線：2点を結ぶ道のり

$$\int_0^T \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \dot{\varphi}^i(t) \dot{\varphi}^j(t)} dt \text{ を最小にする経路}$$

変分法を用いて方程式が導かれた：

$$\frac{d^2 \varphi^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

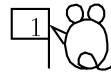
$$\text{ここに } \Gamma_{k,ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right), \quad \Gamma_{ij}^l := \sum_{k=1}^n g^{kl} \Gamma_{k,ij}$$

曲がった空間で平行移動を定義したい。

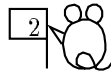
ある測地線の接ベクトルはすべて平行という基準

⇒ 空間の曲がり具合に適合した方向微分 (共変微分)

$$\nabla_{\partial/\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (\text{Christoffel 記号の幾何学的意味})$$



Riemann 多様体の曲率



Riemann 計量 $\sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j$ が与えられた多様体を Riemann 多様体と呼ぶ.

Riemann 計量が対角型 $(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$ でない

\iff 空間がゆがんでいる.

Riemann 計量から、空間の曲がり具合を表すテンソルが誘導される:

$$R^l_{ijk} := \frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^l_{ji}}{\partial x^k} + \sum_{m=1}^n (\Gamma^l_{jm} \Gamma^m_{ki} - \Gamma^l_{km} \Gamma^m_{ji}) \quad (\text{曲率テンソル})$$

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^n R^k_{ikj} \quad (\text{Ricci 曲率})$$

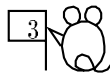
$$R = \sum_{k=1}^n R_{kk} \quad (\text{スカラー曲率})$$

特に、 M が \mathbf{R}^3 内の曲面で、 g が \mathbf{R}^3 の Euclid 距離から

自然に誘導された計量の場合は、 $R = 2K$ となる.

このように座標成分で書くと、テンソルになることを調べるだけで大変!

接続の幾何学 — intrinsic な表現法



現代微分幾何学では、測地線は最短経路より平行移動の基準
接続の理論はファイバーバンドルの概念を用いてきれいに説明されるが、
ここではベクトル場だけで説明する

アフィン接続：多様体 M 上の C^∞ 級ベクトル場の全体を $\mathcal{X}(M)$ と置く。
写像 $\nabla_Y X : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ が次の条件を満たすとき、
 M 上のアフィン接続と呼ぶ。

- 1) $\nabla_{Y_1+Y_2} X = \nabla_{Y_1} X + \nabla_{Y_2} X$ (Y に関する線型性)
- 2) $\nabla_{\varphi Y} X = \varphi \nabla_Y X$ (φ は M 上の関数)
- 3) $\nabla_Y (X_1 + X_2) = \nabla_Y X_1 + \nabla_Y X_2$ (X に関する線型性)
- 4) $\nabla_Y (\varphi X) = Y(\varphi)X + \varphi \nabla_Y X$ (φ は M 上の関数)

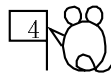
ℚ 共変微分 ∇ 自身はテンソルではない (後述)。

ベクトルの平行移動とは、共変微分が 0 となるような動かし方のことと定める。

接線ベクトルが常に平行 i.e. $\nabla_{\varphi'(t)} \varphi'(t) = 0$ を満たすような曲線を
測地線と呼ぶ。

局所座標を導入すると、Christoffel 記号が $\nabla_{\partial/\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ で定義され、

測地線の方程式 $\ddot{\varphi}^k(t) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \dot{\varphi}^i(t) \dot{\varphi}^j(t)$ が得られる.



実際、測地線 $x = \varphi(t)$ に沿って

$$\frac{d}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{\varphi}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

に注意すると、共変微分の四つの性質を用いて

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\varphi'(t)} \varphi'(t) = \sum_{i,j=1}^n \nabla_{\dot{\varphi}^i(t) \partial/\partial x^i} \left(\dot{\varphi}^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_{i,j=1}^n \dot{\varphi}^i(t) \nabla_{\partial/\partial x^i} \left(\dot{\varphi}^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \dot{\varphi}^i(t) \dot{\varphi}^j(t) \nabla_{\partial/\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^n \dot{\varphi}^i(t) \frac{\partial \dot{\varphi}^j(t)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \\ &= \sum_{i,j=1}^n \dot{\varphi}^i(t) \dot{\varphi}^j(t) \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} + \sum_{j=1}^n \ddot{\varphi}^j(t) \frac{\partial}{\partial x^j} \end{aligned}$$

上の Γ_{ij}^k を定義する共変微分の公式は、前に導いたものと i, j が入れ替わっている。前の議論では Γ_{ij}^k は i, j につき対称だったのでどちらでも良かったが、一般には対称と限らないので、慣用の定義に従っておく。なお、測地線の方程式は Γ_{ij}^k でも Γ_{ji}^k でも同じものになる。

振率テンソル：

X, Y ：ベクトル場, ω ：1次微分形式 (共変ベクトル場) のとき

$$\langle T(X, Y), \omega \rangle := \langle \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \omega \rangle$$

ここに, $[X, Y] = XY - YX$ はベクトル場の交換子積で,

二つのベクトル場から新たなベクトル場を作り出す (これもテンソルではない).

局所座標で $X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ とすれば,

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j}$$

曲率テンソル：

X, Y, Z をベクトル場, ω を1次微分形式 (共変ベクトル場)

とすると

$$\langle R(X, Y)Z, \omega \rangle := \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \omega \rangle$$

この intrinsic な定義から, T が (1, 2) 型, R が (1, 3) 型のテンソルである

ことが直ちに分かる.

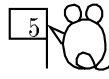
$\nabla_{\partial/\partial x^i}$ を $\frac{\partial}{\partial x^i}$ と対比してみれば, これらのテンソルが空間のねじれ具合を表すことも想像できる.

Christoffel 記号を用いてこれらを成分表示すると,

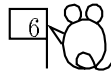
$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{k=1}^n T_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad T_{ij}^k = \langle T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right), dx^k \rangle = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k,$$

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{l=1}^n R^l_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^l},$$

$$R^l_{ijk} := \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^l}{\partial x^k} + \sum_{m=1}^n (\Gamma_{jm}^l \Gamma_{ki}^m - \Gamma_{km}^l \Gamma_{ji}^m) \quad (\text{先の計算と同じ結果}).$$



注：テンソルかどうかの判定



同じく $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ という双線型写像でも、
 $\nabla_X Y$ と $[X, Y]$ はテンソルでないのに、
 $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ はテンソルになる。

これは、座標で表示したときの成分がテンソルの変換規則に従うかどうかの違いだが、
このように (1, 2) 型の場合は、写像が $C^\infty(M)$ -双線型となっているかどうかを
見れば容易に判定できる。

すなわち、 $a, b \in C^\infty(M)$ に対し、

$$\begin{aligned}\nabla_{aX}(bY) &= ab\nabla_X Y + aX(b)Y \neq ab\nabla_X Y, \\ \nabla_{bY}(aX) &= ab\nabla_Y X + bY(a)X \neq ab\nabla_Y X, \\ [aX, bY] &= ab[X, Y] + aX(b)Y - bY(a)X \neq ab[X, Y]\end{aligned}$$

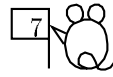
だが、余分な項がうまく打ち消し合って

$$\begin{aligned}T(aX, bY) &= \nabla_{aX}(bY) - \nabla_{bY}(aX) - [aX, bY] \\ &= ab\nabla_X Y - ab\nabla_Y X - ab[X, Y] = abT(X, Y)\end{aligned}$$

となる。

$R(X, Y)Z : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ についても同様にして
テンソルであることが判定できる。(確かめよ。)

アフィン接続としての Riemann 接続



Riemann 計量 g は、反変ベクトル空間上の対称双一次形式 $((0, 2)$ 型テンソル) :

$$X = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y = \sum_{i=1}^n \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i} \text{ に対し, } g(X, Y) = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \xi^i \eta^j$$

特に, $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$

テンソルの共変微分: ベクトル場に沿うテンソルの変化率のことである.
計量テンソル g を例に説明する.

接ベクトル X 方向の測地線に沿う平行移動を $\tau(t)$ と書けば,

$$\begin{aligned} (\nabla_X g)(Y, Z) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau(t)^{-1} g(t)(Y, Z) - g(Y, Z)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tau(t)^{-1} [g(t)(\tau(t)Y, \tau(t)Z)] - \tau(t)^{-1} [g(t)(Y, \tau(t)Z)]}{t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau(t)^{-1} g(t)(Y, \tau(t)Z) - \tau(t)^{-1} g(t)(Y, Z)}{t} + \frac{\tau(t)^{-1} g(t)(Y, Z) - g(Y, Z)}{t} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tau(t)^{-1} g(t)(Y, Z) - g(Y, Z)}{t} + g(0) \left(\lim_{t \rightarrow 0} \tau(t) \frac{Y - \tau(t)^{-1} Y}{t}, Z \right) \\ &\quad + g(0) \left(Y, \lim_{t \rightarrow 0} \tau(t) \frac{Z - \tau(t)^{-1} Z}{t} \right) \\ &= X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \end{aligned}$$

Levi-Civita 接続では, これは 0 となる :

最後の式が X, Y, Z につき多重線型なので, 次を確かめれば十分である :

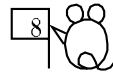
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) - g\left(\nabla_{\partial/\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \nabla_{\partial/\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \right) \\ = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{lj} \Gamma_{ki}^l - g_{il} \Gamma_{kj}^l = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma_{j,ki} - \Gamma_{i,kj} = 0 \end{aligned}$$

また, Γ_{ij}^k の i, j に関する対称性により, $T_{ij}^k = 0$.

逆も成り立つことが知られている :

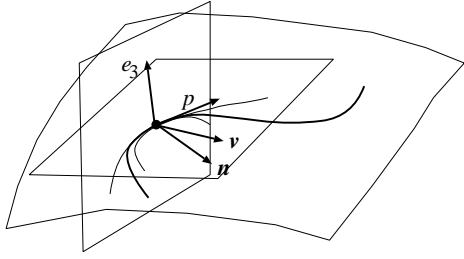
定理 Levi-Civita 接続は, $\nabla g = 0$ かつ $T = 0$ を満たすアフィン接続として, 一意に定まる.

第7章 曲面上の幾何学



3次元空間内の曲面それ自身でなく、その上で成立する、平面幾何とはやや趣を異にする2次元の幾何を学ぶ。

曲面 M の Gauss 曲率を K , M 上の曲線 γ の測地的曲率を κ_g とする。



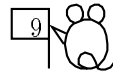
測地的曲率とは、曲面上の曲線の曲面内での曲がり方のみを取り出したもの

例：球面の大円弧は、空間曲線としては球面と同じ曲率を持つが、球面上の曲線としてはまっすぐ。

一般の測地線についても同様。

(正確な定義は後で述べる。)

Gauss-Bonnet の定理 :



1) 曲面 M 上に滑らかな曲線で囲まれた単連結領域 A があるとき,

$$\int_A K dA + \int_{\partial A} \kappa_g ds = 2\pi$$

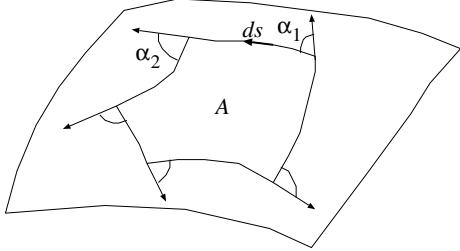
2) 曲面 M 上に滑らかな曲線弧 $\gamma_j, j = 1, 2, \dots, n$ で囲まれた単連結領域 A があり, 曲線弧 γ_j と γ_{j+1} が角 α_j で交わっているとする

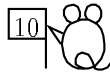
($j = 1, 2, \dots, n, \gamma_{n+1} \equiv \gamma_1$) このとき

$$\int_A K dA + \int_{\partial A} \kappa_g ds + \sum_{j=1}^n \alpha_j = 2\pi$$

3) 境界の無い閉じた曲面 M に対して

$$\int_A K dA = 2\pi\chi(M)$$





復習：曲面 M 上の曲線弧 γ を考える。

曲面 M の接平面の正規直交基底 e_1, e_2 をとるとき

$d\vec{r} = \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2$ (接線ベクトル), $\theta^1 \wedge \theta^2 = dA$ (曲面の面積要素),

第一基本形式 $|d\vec{r}|^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$,

構造方程式 $d\theta^1 = \theta^2 \wedge \omega_2^1, d\theta^2 = \theta^1 \wedge \omega_1^2$ ($\omega_1^2 = -\omega_2^1$)
 $d\omega_2^1 = K\theta^1 \wedge \theta^2$

単位接ベクトルを $\mathbf{p} = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2$ と置く ($\xi^j = \theta^j / \sqrt{(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2}$)

曲率ベクトル $\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \kappa \mathbf{n}$ (\mathbf{n} は γ の空間曲線としての単位法線)

測地的曲率ベクトルとは、これの接平面への正射影のことをいう。

ω_i^j の定義: $d\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^3 \omega_j^k \mathbf{e}_k$ を思い出して計算すると,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{ds} &= \sum_{j=1}^2 \left(\frac{d\xi^j}{ds} \mathbf{e}_j + \xi^j \frac{d\mathbf{e}_j}{ds} \right) = \sum_{j=1}^2 \frac{d\xi^j}{ds} \mathbf{e}_j + \sum_{j=1}^2 \xi^j \sum_{k=1}^3 \frac{\omega_j^k}{ds} \mathbf{e}_k \\ &= \left(\frac{d\xi^1}{ds} + \xi^2 \frac{\omega_2^1}{ds} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{d\xi^2}{ds} + \xi^1 \frac{\omega_1^2}{ds} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\xi^1 \frac{\omega_1^3}{ds} + \xi^2 \frac{\omega_2^3}{ds} \right) \mathbf{e}_3 = \kappa \mathbf{n} \end{aligned}$$

よって測地的曲率ベクトル \mathbf{k}_g は

$$\mathbf{k}_g = \left(\frac{d\xi^1}{ds} + \xi^2 \frac{\omega_2^1}{ds} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{d\xi^2}{ds} + \xi^1 \frac{\omega_1^2}{ds} \right) \mathbf{e}_2$$

$\mathbf{p} \perp \mathbf{n}, \mathbf{p} \perp \mathbf{e}_3$ なので, $\mathbf{k}_g \perp \mathbf{p}$.

そこで、接平面内での \mathbf{p} に垂直な単位ベクトルは $\mathbf{v} = -\xi^2 e_1 + \xi^1 e_2$ となり,

$\mathbf{k}_g = \kappa_g \mathbf{v}$, $\kappa_g = |\mathbf{k}_g|$ と書け, κ_g が測地的曲率.

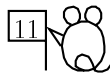
(直感的には, γ の接平面に正射影したものの平面曲線としての曲率)

測地線 $\iff \mathbf{k}_g = 0$ (これも直感的には明らかだろうが, 後で証明する)

ちなみに $\frac{d\mathbf{p}}{ds}$ の e_3 成分は法曲率と呼ばれる.

(こちらは, \mathbf{p} を含む曲面の法線への γ の正射影の曲率)

Gauss-Bonnet の定理の証明 I



Stokes の定理と構造方程式より,

$$\int_A K dA = \int_A K \theta^1 \wedge \theta^2 = \int_A d\omega_2^1 = \int_{\partial A} \omega_2^1$$

最後の線積分の幾何学的意味を考えればよい.

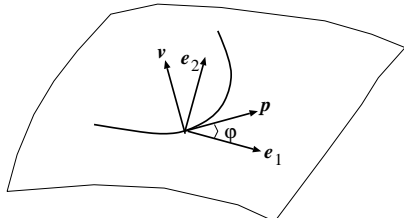
$$\begin{aligned} \kappa_g ds &= \mathbf{k}_g ds \cdot \boldsymbol{\nu} \\ &= \{(d\xi^1 + \omega_2^1 \xi^2) \mathbf{e}_1 + (d\xi^2 + \omega_1^2 \xi^1) \mathbf{e}_2\} \cdot \{-\xi^2 \mathbf{e}_1 + \xi^1 \mathbf{e}_2\} \\ &= -\xi^2 d\xi^1 - \omega_2^1 (\xi^2)^2 + \xi^1 d\xi^2 + \omega_1^2 (\xi^1)^2 \\ &= \xi^1 d\xi^2 - \xi^2 d\xi^1 - \omega_2^1 \end{aligned}$$

\mathbf{e}_1 から \mathbf{p} への回転角を φ とすれば, $\xi^1 = \cos \varphi$, $\xi^2 = \sin \varphi$

$\therefore d\xi^1 = -\sin \varphi d\varphi$, $d\xi^2 = \cos \varphi d\varphi$, $\xi^1 d\xi^2 - \xi^2 d\xi^1 = d\varphi$

よって $\omega_2^1 = d\varphi - \kappa_g ds$ が得られたから,

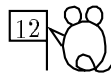
$$\int_A K dA = \int_{\partial A} \omega_2^1 = \int_{\partial A} d\varphi - \int_{\partial A} \kappa_g ds = 2\pi - \int_{\partial A} \kappa_g ds$$



🌀 フレーム \mathbf{e}_j は変化するが, ∂A を一周して戻ってくれば, フレームも元の位置に戻るので, \mathbf{e}_1 の振れの総和は 0.

従って \mathbf{e}_1 から測った角の総変化量は, \mathbf{e}_1 が止まっているときと同じで 2π .

Gauss-Bonnet の定理の証明 II



∂A が区分的に滑らかなときは,

$$\int_A K dA = \int_{\partial A} \omega_2^1 = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \omega_2^1 = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} d\varphi - \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \kappa_g ds$$

よって上の考察より
$$\int_A K dA = \sum_{j=1}^n \{\varphi_j(Q_j) - \varphi_j(P_j)\} - \int_{\partial A} \kappa_g ds$$

ここで, $\varphi_j(P_j), \varphi_j(Q_j)$ は γ_j の接線がその始点および終点で e_1 と成す角. 滑らかな部分における φ の変化量の総和 + 角における φ の変化量の総和 $= 2\pi$ だから,

$$\sum_{j=1}^n \{\varphi_j(Q_j) - \varphi_j(P_j)\} + \sum_{j=1}^n \alpha_j = 2\pi$$

$$\therefore \int_A K dA = 2\pi - \sum_{j=1}^n \alpha_j - \int_{\partial A} \kappa_g ds$$

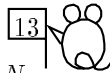
特に A が三角形のときは, 内角を β_j とすると, $\alpha_j = \pi - \beta_j$ なので,

$$\int_A K dA = 2\pi - \int_{\partial A} \kappa_g ds - \sum_{j=1}^3 \alpha_j = \sum_{j=1}^3 \beta_j - \pi - \int_{\partial A} \kappa_g ds$$

三辺が測地線の弧でできているときは, 最後の項が消えて,

$$\int_A K dA = \sum_{j=1}^3 \beta_j - \pi \quad \text{あるいは} \quad \sum_{j=1}^3 \beta_j = \pi + \int_A K dA$$

Gauss-Bonnet の定理の証明 III

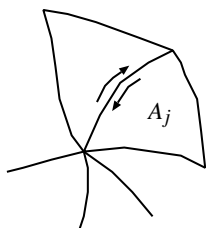


M が閉じた曲面のときは, M を滑らかな辺をもつ曲三角形 $A_j, j = 1, \dots, N$ に分割する. 三角形 A_j の内角を $\beta_{jk}, k = 1, 2, 3$ とすると

$$\int_{A_j} K dA = \sum_{k=1}^3 \beta_{jk} - \pi - \int_{\partial A_j} \kappa_g ds$$

これをすべての三角形について加えると

$$\int_M K dA = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 \beta_{jk} - \pi N - \sum_{j=1}^N \int_{\partial A_j} \kappa_g ds$$



ここで, 三角形の各辺は隣の三角形の対応辺と対で現れ, 線積分の向きは逆よって線積分は二辺ずつ打ち消し合い, 残らない.

また, この三角形分割の頂点数を v とすれば,

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^3 \beta_{jk} = \sum_P (P \text{ を頂点とする三角形のこの頂点での内角の和}) = 2\pi v$$

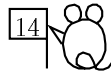
$$\therefore \int_{A_j} K dA = 2\pi v - \pi N = \pi(2v - N)$$

三角形分割なので, 辺の数を e とすれば, $2e = 3N$

$$\text{よって } 2v - N = 2v + 2N - 3N = 2(v + N - e) = 2\chi(M)$$

$$\therefore \int_M K dA = 2\pi\chi(M)$$

$\theta^1 \wedge \theta^2 = dA$ の直接計算による証明:



$$\vec{r} = (\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)),$$

$$d\vec{r} = (\varphi_u du + \varphi_v dv, \psi_u du + \psi_v dv, \chi_u du + \chi_v dv),$$

$$ds^2 = |d\vec{r}|^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

$$E = (\varphi_u)^2 + (\psi_u)^2 + (\chi_u)^2,$$

$$F = (\varphi_u \varphi_v + \psi_u \psi_v + \chi_u \chi_v),$$

$$G = (\varphi_v)^2 + (\psi_v)^2 + (\chi_v)^2,$$

$$ds^2 = (du, dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix},$$

$${}^t P \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} =: \Lambda = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2,$$

$$\text{ここに } {}^t(P\sqrt{\Lambda}^{-1}) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} P\sqrt{\Lambda}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = P\sqrt{\Lambda}^{-1} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$$

であった. 故に $P = (s_{ij})$ と置けば, $\det P = s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21} = 1$ に注意して

$$\theta^1 \wedge \theta^2 = \sqrt{\lambda_1}(s_{11}du + s_{12}dv) \wedge \sqrt{\lambda_2}(s_{21}du + s_{22}dv)$$

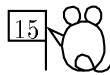
$$= \sqrt{\lambda_1 \lambda_2}(s_{11}s_{22} - s_{12}s_{21})du \wedge dv$$

$$= \sqrt{EG - F^2}du \wedge dv$$

$$= \sqrt{(\psi_u \chi_v - \chi_u \psi_v)^2 + (\chi_u \varphi_v - \varphi_u \chi_v)^2 + (\varphi_u \psi_v - \psi_u \varphi_v)^2} du \wedge dv$$

$$= |\vec{n}| du \wedge dv = dA$$

参考：“測地線 \iff 測地的曲率が0”の証明



まず曲面上の測地線の使いやすい方程式を導く。

成分で計算した式は複雑過ぎて役に立たないので、微分形式を使って最初から変分を計算し直してみよう：

接線ベクトル $d\vec{r} = \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2$,

Riemann 計量 $ds^2 = |d\vec{r}|^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$,

$L = \int_0^T \sqrt{\left(\frac{\theta^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\theta^2}{dt}\right)^2} dt$ の変分は

$$\delta L = \int_0^T \frac{\frac{\theta^1}{dt} \frac{\delta \theta^1}{dt} + \frac{\theta^2}{dt} \frac{\delta \theta^2}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{\theta^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\theta^2}{dt}\right)^2}} dt = \int_0^T \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\theta^1}{dt} \frac{\delta \theta^1}{dt} + \frac{\theta^2}{dt} \frac{\delta \theta^2}{dt} \right) dt,$$

ここに $\Delta = \sqrt{\left(\frac{\theta^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{\theta^2}{dt}\right)^2}$

ここで $\frac{\delta \theta^j}{dt}$ の意味は、 $\theta^j = a_{j1}(u, v) du + a_{j2}(u, v) dv$ と置くととき、

$$\frac{\delta \theta^j}{dt} = \frac{\partial a_{j1}}{\partial u} \frac{du}{dt} \delta u + \frac{\partial a_{j1}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \delta v + a_{j1} \frac{d\delta u}{dt} + \frac{\partial a_{j2}}{\partial u} \frac{du}{dt} \delta u + \frac{\partial a_{j2}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \delta v + a_{j2} \frac{d\delta v}{dt}$$

よって部分積分して $\delta u, \delta v$ についてまとめると、

$$\begin{aligned} \delta L = \int_0^T & \left[\sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{1}{\Delta} \frac{\theta^j}{dt} \left(\frac{\partial a_{j1}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial a_{j2}}{\partial u} \frac{dv}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{a_{j1} \theta^j}{\Delta} \right) \right\} \delta u \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{1}{\Delta} \frac{\theta^j}{dt} \left(\frac{\partial a_{j1}}{\partial v} \frac{du}{dt} + \frac{\partial a_{j2}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{a_{j2} \theta^j}{\Delta} \right) \right\} \delta v \right] dt = 0 \end{aligned}$$

変分法の基本原則より、

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{1}{\Delta} \frac{\theta^j}{dt} \left(\frac{\partial a_{j1}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial a_{j2}}{\partial u} \frac{dv}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{a_{j1} \theta^j}{\Delta} \right) \right\} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^2 \frac{\theta^j}{dt} \left(\frac{\partial a_{j1}}{\partial v} \frac{du}{dt} + \frac{\partial a_{j2}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{a_{j2} \theta^j}{\Delta} \right) \right\} = 0$$

再び dt が ds に比例するとして,

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{\theta^j}{dt} \left(\frac{\partial a_{j1}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial a_{j2}}{\partial u} \frac{dv}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \left(a_{j1} \frac{\theta^j}{dt} \right) \right\} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{\theta^j}{dt} \left(\frac{\partial a_{j1}}{\partial v} \frac{du}{dt} + \frac{\partial a_{j2}}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \left(a_{j2} \frac{\theta^j}{dt} \right) \right\} = 0$$

$$\therefore a_{11} \frac{d\theta^1}{dt^2} + a_{21} \frac{d\theta^2}{dt^2} = \sum_{j=1}^2 \frac{\theta^j}{dt} \left\{ \frac{\partial a_{j2}}{\partial u} - \frac{\partial a_{j1}}{\partial v} \right\} \frac{dv}{dt},$$

$$a_{12} \frac{d\theta^1}{dt^2} + a_{22} \frac{d\theta^2}{dt^2} = \sum_{j=1}^2 \frac{\theta^j}{dt} \left\{ \frac{\partial a_{j1}}{\partial v} - \frac{\partial a_{j2}}{\partial u} \right\} \frac{du}{dt},$$

これから,

$$\frac{d\theta^1}{dt^2} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left(a_{21} \frac{du}{dt} + a_{22} \frac{dv}{dt} \right) \sum_{j=1}^2 \frac{\theta^j}{dt} \left\{ \frac{\partial a_{j2}}{\partial u} - \frac{\partial a_{j1}}{\partial v} \right\}$$

$$= \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \frac{\theta^2}{dt} \sum_{j=1}^2 \frac{\theta^j}{dt} \left\{ \frac{\partial a_{j2}}{\partial u} - \frac{\partial a_{j1}}{\partial v} \right\},$$

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = -\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \left(a_{11} \frac{du}{dt} + a_{12} \frac{dv}{dt} \right) \sum_{j=1}^2 \frac{\theta^j}{dt} \left\{ \frac{\partial a_{j2}}{\partial u} - \frac{\partial a_{j1}}{\partial v} \right\}$$

$$= -\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \frac{\theta^1}{dt} \sum_{j=1}^2 \frac{\theta^j}{dt} \left\{ \frac{\partial a_{j2}}{\partial u} - \frac{\partial a_{j1}}{\partial v} \right\}.$$

⊗ $\frac{d\theta^j}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\theta^j}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(a_{j1} \frac{du}{dt} + a_{j2} \frac{dv}{dt} \right)$ の意である.

再掲:

$$\frac{d\theta^1}{dt^2} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \frac{\theta^2}{dt} \sum_{j=1}^2 \frac{\theta^j}{dt} \left\{ \frac{\partial a_{j2}}{\partial u} - \frac{\partial a_{j1}}{\partial v} \right\},$$

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = -\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \frac{\theta^1}{dt} \sum_{j=1}^2 \frac{\theta^j}{dt} \left\{ \frac{\partial a_{j2}}{\partial u} - \frac{\partial a_{j1}}{\partial v} \right\}.$$

ところで, 構造方程式より,

$$d\theta^1 = \theta^2 \wedge \omega_2^1, \quad d\theta^2 = \theta^1 \wedge \omega_1^2, \quad \omega_2^1 = -\omega_1^2$$

$\theta^j = a_{j1}du + a_{j2}dv$ なので, これより,

$$\left(\frac{\partial a_{12}}{\partial u} - \frac{\partial a_{11}}{\partial v} \right) du \wedge dv = \theta^2 \wedge \omega_2^1, \quad \left(\frac{\partial a_{22}}{\partial u} - \frac{\partial a_{21}}{\partial v} \right) du \wedge dv = \theta^1 \wedge \omega_1^2$$

また, $\theta^1 \wedge \theta^2 = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})du \wedge dv$. 従って

$$\omega_1^2 = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \left\{ \left(\frac{\partial a_{12}}{\partial u} - \frac{\partial a_{11}}{\partial v} \right) \theta^1 + \left(\frac{\partial a_{22}}{\partial u} - \frac{\partial a_{21}}{\partial v} \right) \theta^2 \right\} = -\omega_2^1$$

以上と上の再掲式を比較すると, 結局測地線の方程式として,

$$\frac{d\theta^1}{dt^2} = -\frac{\theta^2}{dt} \frac{\omega_2^1}{dt}, \quad \frac{d\theta^2}{dt^2} = -\frac{\theta^1}{dt} \frac{\omega_1^2}{dt}$$

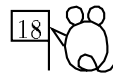
あるいは,

$$\boxed{\frac{d\theta^1}{dt^2} + \frac{\theta^2}{dt} \frac{\omega_2^1}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{\theta^1}{dt} \frac{\omega_1^2}{dt} = 0}$$

上の方程式から Γ_{ij}^k を算出するには, まだ計算が必要.

以上の準備の下に,

“測地線 \iff 測地的曲率が 0”



であることの証明:

再び $\mathbf{p} = \xi^1 \mathbf{e}_1 + \xi^2 \mathbf{e}_2$, $\xi^j = \theta^j / \sqrt{(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2}$ とする.

$$\mathbf{k}_g = \left(\frac{d\xi^1}{ds} + \xi^2 \frac{\omega_2^1}{ds} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{d\xi^2}{ds} + \xi^1 \frac{\omega_1^2}{ds} \right) \mathbf{e}_2 = 0$$

の係数が 0 となる条件を調べる.

$ds = \sqrt{(\theta^1)^2 + (\theta^2)^2}$ なので, $\xi^j = \frac{\theta^j}{ds}$. 従って

$$\frac{d\xi^1}{ds} + \xi^2 \frac{\omega_2^1}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{\theta^1}{ds} \right) + \frac{\theta^2}{ds} \frac{\omega_2^1}{ds} = 0$$

は測地線の方程式そのものである.

もう一つも同様.