試験予想問題集

問題 1 0 と 1 より成る長さ n の文字列 $\boldsymbol{x}$ の集合 $\boldsymbol{F}_2^n$ に Hamming 距離を

$$\mathrm{dis}_{\mathrm{H}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) := \#\{1 \le i \le n \,;\, x_i \ne y_i\}$$

で定める．これが距離の公理を満たすことを示せ．この距離が $\boldsymbol{F}_2^n$ 上に定めるのはどんな位相か？

問題 2 3 次元空間 $\boldsymbol{R}^3$ の点の間に，

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|^2 + |x_3 - y_3|^3$$

で定められた d は距離となるか？

問題 3 平面の次の集合の中で，開集合と閉集合を選び出せ．

(1) $\{(x,y) \,;\, x^2+y^2 > 1\}$　(2) $\{(x,y) \,;\, x>0, |y|<2\}$　(3) $\{(x,y) \,;\, x^2+y^2 = 2\}$
(4) $\{(x,y) \,;\, x^2+y^2 \le 1\}$　(5) $\{(x,y) \,;\, x^2+y^2 \le 1, y>0\}$　(6) $\{(x,y) \,;\, x^2 = 1, y = x\}$
(7) $\{(x,y) \,;\, x^2+y^2 < 1, (x,y) \ne (0,0)\}$　(8) $\{(x,y) \,;\, x^2+y^2 < 1$ または $x^2+y^2 \ge 2\}$

問題 4 (1) 平面の点の間に，

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|}$$

で定義された d は距離となるか？
(2) 上の d を用いて，$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}^2$ の基本近傍系を

$$\{\boldsymbol{x} \,;\, d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) < \varepsilon\}, \qquad \varepsilon > 0$$

で与えると，位相が定義できるか？

問題 5 問題 3 の集合について，閉包，開核，境界を示せ．

問題 6 E の閉包 $=$ “E の外部の補集合” となることを示せ．

問題 7 $1 \le p \le q \le \infty$ のとき，L_p-距離 と L_q-距離の間の不等式

$$c_{p,q} d_q(P,Q) \le d_p(P,Q) \le C_{p,q} d_q(P,Q)$$

を成り立たせるような最良の正定数 $c_{p,q}, C_{p,q}$ を決定せよ．

問題 8 X を勝手な集合とし，O が開集合 $\Longleftrightarrow$ $O = \emptyset$ であるか．または $\complement O$ は高々有限個の点より成る，と定めるとき，位相空間となることを示せ．

問題 9 4 個の点より成る有限集合に定まる異なる位相構造を列挙せよ．またその中で Hausdorff となるものはどれか？

問題 10 $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への次のような写像の連続性を調べよ．

(1) $f(x,y) = \begin{cases} (x-y, 0), & x \ge y \text{ のとき}, \\ (0, y-x), & x < y \text{ のとき} \end{cases}$　(2) $f(x,y) = \begin{cases} (x,y), & xy \ge 0 \text{ のとき}, \\ (y,x), & xy < 0 \text{ のとき} \end{cases}$

問題 11 $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 f で，$f(x,y) = x$ で定義されるもの (射影) は，連続で開写像だが，閉写像ではないことを示せ．

問題 12 $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像 f で，$f(x) = (x,0)$ で定義されるもの (埋め込み) は，連続で閉写像だが，開写像ではないことを示せ．

問題 13 $\boldsymbol{R}^2$ の次のような部分集合について，連結か否かを判定せよ．

(1) $\{(x,y)\ ;\ (x-1)y=0\}$ (2) $\{(x,y)\ ;\ (x^2+y^2-1)(x-2)>0\}$

(3) $\{(\frac{1}{n},0)\ ;\ n=1,2,\ldots\}$ (4) $\{(x,y)\ ;\ y=\sin\frac{1}{x}, x>0\}\cup\{(0,y)\ ;\ -1\leq y\leq 1\}$

問題 14 $\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}^2$ が位相同型でないことを，次の手順で示せ．
(1) $f:\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ という位相同型が存在すれば，$f\big|_{\boldsymbol{R}^2\setminus P}:\boldsymbol{R}^2\setminus P\to\boldsymbol{R}\setminus f(P)$ も位相同型となる．
(2) $\boldsymbol{R}^2\setminus P$ は連結である．
(3) $\boldsymbol{R}\setminus f(P)$ は連結でない．

問題 15 次の集合の孤立点，集積点を挙げよ．

(1) $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ ;\ y^2=x^2(x-1)\}$ (2) $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ ;\ 0\leq x<1,\ 0\leq y<1,\ x\in\boldsymbol{Q},\ y\in\boldsymbol{Q}\}$
(3) $\{x\in\boldsymbol{R}\ ;\ \exists n\in\boldsymbol{N}\ \text{s.t.}\ nx=1\}$ (4) $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ ;\ (x,y)=(0,0)$ または $x=1$ または $y>1\}$

問題 16 (1) $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ の中で稠密な部分集合を成すことを示せ．
(2) 分母が 3 の冪であるような有理数は $\boldsymbol{R}$ で稠密であることを示せ．

問題 17 $\boldsymbol{R}^2$ の二つの交わらない閉集合 Z_1, Z_2 に対して，次の量は常に正となるか？

$$\mathrm{dis}\,(Z_1,Z_2):=\inf_{P\in Z_1,Q\in Z_2}\mathrm{dis}\,(P,Q)$$

問題 18 次の位相空間の中から，T1 を満たすもの，Hausdorff であるものを拾い出せ．
(1) $\boldsymbol{R}^2$ の Zariski 位相． (2) $\boldsymbol{R}^2$ の密着位相． (3) $\boldsymbol{R}^2$ の離散位相． (4) 問題 8 の位相空間．

問題 19 連続関数は距離空間のコンパクト集合上一様連続であることを示せ．

問題 20 連続関数の列 $f_n(x)$ がコンパクト集合 K 上単調減少して連続関数 $f(x)$ に各点収束していれば，実は一様収束している (Dini の定理)．これを次の方針で示せ．
(1) もし，一様収束していなければ，ある $\varepsilon>0$ に対し，集合 $\{x\in K; f_n(x)-f(x)\geq\varepsilon\}$ はすべての n に対して空でない．
(2) 上の集合には共通点が存在する．

問題 21 問題 8 の位相空間はコンパクトであることを示せ．

問題 22 次の位相空間のペアは位相同型か否か？理由を付して答えよ．
(1) 閉区間 $[0,1]\subset\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}$． (2) 半開区間 $(0,1]\subset\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}$．
(3) 開区間 $(0,1)\subset\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}$． (4) 円の内部 $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ ;\ x^2+y^2<1\}$ と $\boldsymbol{R}^2$．
(5) 開正方形 $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ ;\ |x|+|y|<1\}$ と $\boldsymbol{R}^2$． (6) 円の内部 $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ ;\ x^2+y^2<1\}$ と $\boldsymbol{R}$．
(7) 円の外部 $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ ;\ x^2+y^2>1\}$ と円環 $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2\ ;\ 1<x^2+y^2<2\}$．

問題 23 X を距離関数 dis が与えられた完備な距離空間とする．写像 $f:X\to X$ が，ある正の定数 $\lambda<1$ について，

$$\forall P,Q\in X\ \text{ に対し }\ \mathrm{dis}\,(f(P),f(Q))\leq\lambda\mathrm{dis}\,(P,Q)$$

を満たすとき，縮小写像と呼ばれる．
(1) 縮小写像は連続なことを示せ．
(2) $P_0\in X$ を任意に固定し，$P_1=f(P_0),\ldots,P_n=f(P_{n-1}),\ldots$ で点列 P_n を帰納的に定めると，Cauchy 列となることを示せ．
(3) 上の点列の極限は $f(P)=P$ を満たすこと (i.e. f の不動点となること) を示せ．
(4) f の不動点はただ一つであることを示せ．