§2.4 近傍

定義 2.5 近傍の定義 (X, d) を距離空間とする。$P \in X$ の ε-近傍は, 前に定義したように

$$B_\varepsilon(P) = \{Q \in X; d(Q, P) < \varepsilon\}.$$

より一般に, U が P の近傍とは,

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{s.t.} \quad U \supset B_\varepsilon(P).$$

U が開集合のとき開近傍という。単に近傍というときも開近傍を意味することが多い。

近傍の英語は neighborhood だが，ドイツ語が Umgebung で，この頭文字を用いてよく U と書かれる．ちなみに，フランス語では近傍は voisinage. U と並び V も近傍を表す記号としてよく使われるが，これはフランス語から来ているのではなく，単に U の次だからでしょう．

P の近傍の全体を P の**近傍系**と言い，$\mathcal{U}_P$ 等の記号で表す.

補題 2.4 近傍系の公理 P の近傍系は次の性質を満たす.

(1) U が P の近傍なら，$P \in U$.

(2) U_1, U_2 が P の近傍なら，$U_1 \cap U_2$ も P の近傍である．(従って，P の近傍を有限個取るとき，それらの共通部分も再び P の近傍となる.)

(3) U が P の近傍なら，$V \supset U$ も P の近傍である.

(4) U が P の近傍なら，P の他の近傍 $V \subset U$ で，$\forall Q \in V$ に対して U が Q の近傍ともなるようなものが存在する.

距離空間の近傍については，証明は容易．一般には，これは近傍系を特徴づける性質 (公理) となる.

§2.5 閉包・開核・内点・外点・境界

X の部分集合のほとんどは開集合でも閉集合でもない．それらからどれくらい離れているか？

定義 2.6 $E \subset X$ を部分集合とするとき，X の点 P は次の 3 種類に分類される：

(1) **内点** P のある近傍 U が存在し $U \subset E$ となる.

(2) **外点** P のある近傍 U が存在し $U \cap E = \emptyset$ となる.

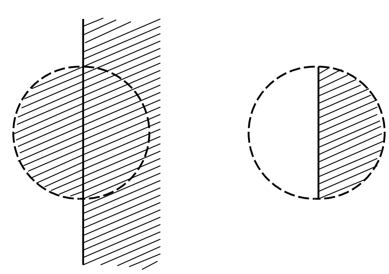
(3) **境界点** 内点でも外点でもない.

E の内点の集合を E の内部または内核といい，$Int(E)$, $\overset{\circ}{E}$ などの記号で表す．E の外点の集合を E の外部という．E の境界点の集合を E の境界といい ∂E などと記す.

例 2.1

(1) 平面の集合 $E = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1$ または $x \geq 0\}$ は閉集合でも開集合でもない．開核は $\{(x, y); x^2 + y^2 < 1$ または $x > 0\}$, 閉包は $\{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1$ または $x \geq 0\}$, 境界は $\{(x, y); x^2 + y^2 = 1, x \leq 0\} \cup \{(x, y); x = 0, |y| > 1\}$.

(2) 平面の集合 $E = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1$ かつ $x \geq 0\}$ は閉集合でも開集合でもない．開核は $\{(x, y); x^2 + y^2 < 1, x > 0\}$, 閉包は $\{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, 境界は $\{(x, y); x^2 + y^2 = 1, x \geq 0\} \cup \{(x, y); x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$.



補題 2.5 P が E の境界点
$\Longleftrightarrow$ P のどんなに小さな近傍も E の点と E に属さない点をともに含む．

補題 2.6 E の内核は開集合となる．それは E に含まれる最大の開集合である．

補題 2.7 E の境界 ∂E は閉集合である．また，E にその境界を合併したものは閉集合となる．これを E の**閉包**と呼び $\overline{E}$ などの記号で表す．これは E を含む最小の閉集合である．

問題 2.3 問題 2.1 の集合について，閉包，開核，境界を示せ．

問題 2.4 E の閉包 $=$ "E の外部の補集合"．

第 3 章　抽象的な位相空間の言葉

§3.1　一般の位相空間

距離がなくても位相は定義できる．開集合族によるもの，近傍系によるものがともによく用いられる．

定義 3.1　開集合族の公理とそれによる位相の定義　集合 X の部分集合の族 $\mathcal{O} = \{O_\lambda, \lambda \in \mathit{\Lambda}\}$, が次の**開集合族の公理**を満たしているとき，これが開集合の全体となるような位相を X に定義できる．

(1) $\emptyset \in \mathcal{O}$, $X \in \mathcal{O}$.
(2) $Y_1, Y_2 \in \mathcal{O}$ なら，$Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{O}$．従って，$Y_1, \ldots, Y_n \in \mathcal{O}$ なら，$Y_1 \cap \cdots \cap Y_n \in \mathcal{O}$.
(3) $Y_1, Y_2 \in \mathcal{O}$ なら，$Y_1 \cup Y_2 \in \mathcal{O}$．より一般に，$Y_\lambda \in \mathcal{O}, \lambda \in \mathit{\Lambda}$ なら，$\bigcup_{\lambda \in \mathit{\Lambda}} Y_\lambda \in \mathcal{O}$.

定義 3.2　開集合族で定義された位相空間の近傍系の定義　U が P の開近傍とは，$U \in \mathcal{O}$ かつ $U \ni P$ なること．U が P の近傍とは，U が P の開近傍を含むこと．

補題 3.1 このようにして定義された近傍は, 補題 2.4 の性質, すなわち，**近傍系の公理**を満たす．

定義 3.3　近傍系で定義された位相空間の開集合の定義　集合 X の各点において，近傍系の公理を満たすような部分集合の族が与えられているとき，W が X の開集合であるとは，$\forall P \in W$ に対して，P の近傍 U で $U \subset W$ となるものが存在することと定める．

こうして，近傍系からも位相が定義できる．

例 3.1 距離から定まる位相の例.
$\boldsymbol{R}^2$ においては，任意の $p \geq 1$ に対して，L_p-距離 d_p から定まる ε-近傍は，各点に同一の近傍系を定め，また，これらが定める $\boldsymbol{R}^2$ の開集合族は一致する．すなわち，どの距離を用いても定まる位相は同じ．

これは，$1 \leq p \leq q \leq \infty$ のとき，

$$d_q(P,Q) \leq d_p(P,Q) \leq c_{p,q} d_q(P,Q)$$

という不等式を成り立たせるような定数 $c_{p,q}$ が存在することから，直ちに分かる．

問題 3.1 上の不等式を成り立たせるような最良の定数 $c_{p,q}$ を決定せよ．

例 3.2 距離空間でない位相空間の例.
(1) Zariski（ザリスキー）位相. 平面 $\boldsymbol{R}^2$ の Zariski 閉集合を，有限個の多項式 $f_1(x,y), \ldots, f_n(x,y)$ の共通零点

の集合として表されるようなものと定義する：

$$F = \{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2; f_1(x,y) = \cdots = f_n(x,y) = 0\}.$$

(ただし，全空間は $n=0$ のときとして含まれているものと規約する．また，矛盾した式を連立させることで，結果的に空集合も含まれていることに注意.) このような集合の補集合を Zariski 開集合と定義する.
$\{x=0, y=0\}$, $x=1, y=1$ は上の定義で確かに閉集合だが，これらの和集合が再び上の形に書けることは，直ちには明らかでは無いであろう．離散数学で習ったイデアルの一般論を使うと，この和集合は $\{x(x-1), x(y-1), y(x-1), y(y-1)\}$ の共通零点として書ける．
(2) 実数の集合 $\boldsymbol{R}$ に右極限の位相を，各点の次のような近傍系を与えることにより定義する：$a \in \boldsymbol{R}$ の近傍は $\exists\varepsilon > 0$ について，半開区間 $[a, a+\varepsilon)$ を含むような集合とする．
(3) どんな集合 X に対しても，開集合を $\emptyset$ と X だけと定義すれば位相空間となる．これを X の**密着位相**と呼ぶ．この位相空間では全ての点は隣組となる仲良しコミュニティとなっている．
(4) どんな集合 X に対しても，開集合を X の部分集合のすべてと定義すれば位相空間となる．これを X の**離散位相**と呼ぶ．このとき $\{P\}$ が点 P の一つの近傍となる．この位相空間では全ての点は孤立して生活している非常にプライバシーの強いコミュニティとなっている．

§3.2 基本近傍系と開集合の基

距離空間では，一般の近傍を考える必要はほとんど無く，大抵は ε-近傍だけで話が済む．このような役割を一般の位相空間で果たすものとして，次が有る：

定義 3.4 基本近傍系 P の近傍系の部分族 $\mathcal{V}_P$ が P の基本近傍系であるとは, P の任意の近傍 U に対して $V \in \mathcal{V}_P$ で $V \subset U$ となるものが存在することを言う．

基本近傍系を与えるだけで位相は定義できる．実際，開集合の定義 3.3 において，P の近傍 U を基本近傍の一つとしても，実質は変わらないから．

補題 3.2 X の各点 P に対して抽象的に与えられた部分集合の族 $\mathcal{V}_P$ が，各点 P の基本近傍系となる (ような位相が X に定義できる) ためには, 以下の条件が成り立つことが必要十分である：
(1) $\forall V \in \mathcal{V}_P$ について $P \in V$.
(2) $\forall V_1, V_2 \in \mathcal{V}_P$ に対し $\exists V_3 \in \mathcal{V}_P$ s.t. $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.
(3) $\forall U \in \mathcal{V}_P$ について $V \subset U$ なる $V \in \mathcal{V}_P$ で, $\forall Q \in V$ について $\exists W \in \mathcal{V}_Q$ s.t. $W \subset U$ となるようなものが存在する.

例 3.3 距離空間では，点 P の ε-近傍は，P の基本近傍系の例となる．更に，ε を正の有理数に限ってもよいし，$\varepsilon = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ に制限してもよい．

定義 3.5 開集合の基 X の部分集合の族 $\mathcal{W}$ が X の**開集合の基**であるとは，X の任意の開集合 O が $\mathcal{W}$ の元の (無限個も許す) 和集合として表せることを言う．
X の部分集合の族 $\mathcal{W}$ が X の**開集合の部分基**であるとは，その元の有限個の共通部分の全体が X の開集合の基となること，i.e. 任意の開集合が

$$O = \bigcup_\mu W_{\mu,1} \cap \cdots \cap W_{\mu,n_\mu}, \quad ここに \ \ W_\mu, i \in \mathcal{W}$$

の形に表せることをいう．すなわち，部分集合の族 $\mathcal{W}$ に有限個の共通部分を取る操作と，無限個の合併を取る操作を施せば，すべての開集合が得られることをいう．

例 3.4 開集合の基の例：

(1) $\boldsymbol{R}^2$ (の任意の L_p 距離から定まる位相) においては，$\mathcal{W}$ として，全ての有理点 (x, y 座標がともに有理数であるような点) の $1/n$-近傍 ($n = 1, 2, \ldots$) をすべて集めたものは開集合の基となる．

(2) $\boldsymbol{R}^2$ の Zariski 位相においては，一つの既約多項式 $f(x, y)$ から $f(x, y) \neq 0$ として定まる集合は開集合の基となる．

問題 3.2 上の例の主張を証明せよ．

補題 3.3 X の部分集合の族 $\mathcal{W}$ が開集合の基となるような位相が X に定義できるためには，$\mathcal{W}$ が次の条件を満たすことが必要十分である．また，この条件を満たす $\mathcal{W}$ に対して，位相はただ一つ定まる．

(1) $\forall P \in X$ に対し，$\exists O \in \mathcal{W}$ s.t. $P \in O$.
(2) $\forall O_1, O_2 \in \mathcal{W}$ に対し, $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{W}$.

X の任意の部分集合の族 $\mathcal{W}$ は，それが開集合の基となるような位相を X にただ一つ定義する．

(i) 条件 (1) から X が開集合となることが出る．その際，空集合は $\mathcal{W}$ の元の零個の和集合として抽象論理的解釈により得られるので，常に開集合となる．
(ii) 有限個の共通部分というときに，零個の共通部分は, 抽象論理的解釈で X 全体となるので，どんな部分集合の族 $\mathcal{W}$ からも X が得られ，従って，$\forall P \in X$ について，それを含む元 X が少なくとも一つは存在するので，開集合の公理 (1) が自動的に満たされる．分かりにくければ仮定しても良いだろう．

問題 3.3 n 個の点より成る有限集合に何種類の異なる位相構造が入れられるか？ $n = 1, 2, 3, 4, 5$ のときに考えてみよ．[ヒント：例えば，開集合の族が X の部分集合の族として異なっていれば，異なる位相空間である．]

一般の n の場合は，僕の学生時代には組合せ論における未解決の難問でした．今はどうなのか，ネットで検索してみよう!

第 4 章　連続写像

集合論的写像に上部構造との整合性を持たせたものが重要である．代数構造の場合は，それは**準同型写像**となる．位相構造の場合，これに当たるものは連続写像である．

§4.1　連続写像の定義

定義 4.1 (X, d_X), (Y, d_Y) を二つの距離空間とする．写像 $F : X \to Y$ が点 $P \in X$ で連続とは，$\forall \varepsilon > 0$ に対し，$\exists \delta > 0$ s.t. $d_X(Q, P) < \delta \Longrightarrow d_Y(F(Q), F(P)) < \varepsilon$ となることをいう．
言い換えると，$\forall B_\varepsilon(F(P))$ に対し，$\exists B_\delta(P)$ s.t. $F(B_\delta(P)) \subset B_\varepsilon(F(P))$ となること．

前半は微分積分学で学んだ，函数の連続性の $\varepsilon - \delta$ 論法に他ならない．最後の定式化だと，一般の位相空間の間の写像にも通用する：

定義 4.2 X, Y を二つの位相空間とする．写像 $F : X \to Y$ が点 $P \in X$ で連続とは，$\forall U \in \mathcal{U}_{F(P)}$ に対し $\exists V \in \mathcal{U}_P$ s.t. $F(V) \subset U$ となること．

距離空間の場合は，この二つの定義は明らかに同値．(より一般に，近傍を基本近傍に取り替えても条件は同等.)