補題 4.1　距離空間における写像の連続性の点列による特徴づけ　二つの距離空間 $(X, d_X), (Y, d_Y)$ の間の写像 $F : X \to Y$ が点 $P \in X$ で連続
$\Longleftrightarrow \forall P_n$ s.t. $P_n \to P$ に対して $F(P_n) \to F(P)$ となる．

証明　微積分でやっていれば証明は同じだが，多分ちゃんとはやっていないか，忘れているだろうから，繰り返す．
$\Longrightarrow$ $P_n \to P$ のとき，$f(P_n) \to f(P)$ となることを示す．そのためには，$\forall U \in \mathcal{U}_{f(P)}$ に対し，$\exists n_U$ s.t. $n \geq n_U$ なら $f(P_n) \in U$ となることを言えば良い．仮定により，$\exists V \in \mathcal{U}_P$ s.t. $f(V) \subset U$. よって $P_n \to P$ の仮定から，$\exists n_V$ s.t. $n \geq n_V$ なら $P_n \in V$. すると，$n \geq n_V$ のとき $f(P_n) \in f(V) \subset U$. つまり $n_U = n_V$ で求める主張が成り立った．
$\Longleftarrow$ $\forall U \in \mathcal{U}_{f(P)}$ に対し，$\exists n_V$ s.t. $f(V) \subset U$ をいう．今，$n = 1, 2, \ldots$ に対して $B_{1/n}(P)$ の中には条件 $f(B_{1/n}(P)) \subset U$ を満たすものが存在しないとせよ．このとき, $\exists P_n \in B_{1/n}(P)$ s.t. $f(P_n) \notin U$. すると，点列 P_n は $P_n \to P$ にも拘らず, $f(P_n) \not\to f(P)$ となる．これは矛盾．

§4.2　大域的な連続写像の特徴づけ

定義 4.3　二つの位相空間 X, Y の間の写像 F が X の各点で連続のとき，単に連続写像と呼ぶ．

補題 4.2　① 二つの位相空間 X, Y の間の写像 F が連続
$\Longleftrightarrow$ ② 任意の開集合 $O \subset Y$ に対し，その F による逆像 $F^{-1}(O)$ は X の開集合となる．
$\Longleftrightarrow$ ③ 任意の閉集合 $Z \subset Y$ に対し，その F による逆像 $F^{-1}(Z)$ は X の閉集合となる．

証明　① $\Longrightarrow$ ②．点 $P \in f^{-1}(O) \subset X$ を任意にとると，$f(P) \in O$. $O \subset Y$ は開集合なので，$f(P) \in U \subset O$ なる近傍 U がある．f の連続性から，P のある近傍 V が存在して，$f(V) \subset U$, よって $V \subset f^{-1}(O)$. 従って $f^{-1}(O) \subset X$ は開集合である．
② $\Longrightarrow$ ③．$\complement f^{-1}(O) = f^{-1}(\complement O)$ が数理基礎論で示されているので，補題 2.3 より明らか．
③ $\Longrightarrow$ ①．$f(P)$ の開近傍 U をとる．$\complement U$ は閉集合なので，$f^{-1}(\complement U) = \complement f^{-1}(U)$ も閉集合．すると $f^{-1}(U)$ は開集合となり，$f^{-1}(P) \in f^{-1}(U)$ のある近傍 V が存在して $f^{-1}(P) \subset V \subset f^{-1}(U)$. よって $f(V) \subset U$. 故に f は連続．

問題 4.1　$\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}^2$ への次のような写像の連続性を調べよ．

(1) $f(x,y) = \begin{cases} (x-y, 0), & x \geq y \text{ のとき}, \\ (0, y-x), & x < y \text{ のとき} \end{cases}$　　(2) $f(x,y) = \begin{cases} (x,y), & xy \geq 0 \text{ のとき}, \\ (y,x), & xy < 0 \text{ のとき} \end{cases}$

§4.3　開写像・閉写像

開集合の連続写像による像は必ずしも開集合になるとは限らない．同様に，閉集合の連続写像による像も必ずしも閉集合になるとは限らない．

定義 4.4　f を位相空間 X から Y への写像とする．開集合の f による像がいつでも開集合となるとき，f を**開写像**と呼ぶ．また，閉集合の f による像がいつでも閉集合となるとき，f を**閉写像**と呼ぶ．

例 4.1　(1) $\boldsymbol{R}^2$ から $\boldsymbol{R}$ への写像 f で, $f(x,y) = x$ で定義されるもの (射影) は，連続で開写像だが，閉写像ではない．実際，$\boldsymbol{R}^2$ の部分集合 $\{(x,y); xy = 1\}$ は閉集合だが，その f による像は $\{x; x \neq 0\}$ となり，$\boldsymbol{R}$ の開集合である．
(2) $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}^2$ への写像 f で, $f(x) = (x, 0)$ で定義されるもの (埋め込み) は，連続で閉写像だが，開写像ではない．実際，全空間 $\boldsymbol{R}$ の像 $\{(x,0); x \in \boldsymbol{R}\}$ は $\boldsymbol{R}^2$ の閉集合だが開集合ではない．

問題 4.2　上に述べられたことを確かめよ．

§4.4 位相同型

定義 4.5 二つの位相空間 X, Y の間の写像 f について，
① f は連続.
② f^{-1} が存在し連続
のとき，f を**位相同型写像**と呼ぶ.
二つの位相空間 X, Y の間に位相同型写像が存在するとき，この二つは**位相同型**であるという.

位相同型な二つの位相空間は，位相空間論では同一視する.

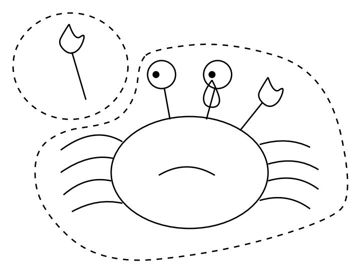
補題 4.3 二つの位相空間 X, Y の間の写像 f が位相同型となるためには，次の条件が成り立つことが必要十分である：
(1) f は集合の写像として一対一全射である.
(2) f は連続.
(3) f は開写像.

第 5 章 連結性

§5.1 連結性の定義

集合が繋がっているかどうかは，位相が導入されて始めて議論できる概念の一つである.

定義 5.1 位相空間 X の部分集合 A が**連結**とは，X の開集合のペア O_1, O_2 で
(1) $A \cap O_1 \neq \emptyset$, $A \cap O_2 \neq \emptyset$,
(2) $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$,
(3) $A \subset O_1 \cup O_2$
となるようなものが存在しないことをいう.



例 5.1 (1) $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $A = \{x \in \boldsymbol{R}; x \neq 0\} = \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ は連結でない．実際，$\boldsymbol{R}$ の二つの空でない開集合 $O_1 = \{x > 0\} \subset A$, $O_2 = \{x < 0\} \subset A$ により，$O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \cup O_2 \supset A$ とできるから.
(2) $\boldsymbol{R}$ の部分集合 $B = \{x \in \boldsymbol{R}; 0 \leq x \leq 1\} = [0,1]$ は連結である．実際，もし $[0,1] \cap O_1 \neq \emptyset$, $[0,1] \cap O_2 \neq \emptyset$, $[0,1] \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \cup O_2 \supset B$ とできたとすると，1 はどちらかに入るから，$1 \in O_2$ としても一般性を失わない．このとき，集合 $C = \{x; 0 \leq x \leq 1, x \in O_1\}$ を考えると，$B \cap O_1 \neq \emptyset$ より空ではないから，実数の連続性公理により, C には上限 $\mu \geq 0$ が存在する．O_2 は開集合なので 1 とともにそのある近傍も O_2 に含まれるから, $\mu < 1$. このとき，$\mu \in O_1$ としても $\mu \in O_2$ としても，矛盾が生ずることが, これらが開集合であることを用いて容易に示せる.

問題 5.1 生じる矛盾を追求して，上の証明を完結させよ.

問題 5.2 $\boldsymbol{R}^2$ の次のような部分集合について，連結か否かを判定せよ.

(1) $\{(x,y); (x-1)y = 0\}$ (2) $\{(x,y); (x^2+y^2-1)(x-2) > 0\}$

(3) $\{(\frac{1}{n}, 0); n = 1, 2, \ldots\}$ (4) $\{(x,y); y = \sin\frac{1}{x}, x > 0\} \cup \{(0,y); -1 \leq y \leq 1\}$

§5.2 誘導位相

距離空間，あるいはより一般に，位相空間の部分集合には次のようにして自然に位相が入る．

定義 5.2 (X, d) を距離空間，$A \subset X$ を任意の部分集合とするとき，A の距離を d により定義すれば，A も距離空間となる．これを X から A に誘導された距離という．

特に，X における ε-近傍を $B_\varepsilon(P)$ とするとき，$P \in A$ の A における ε-近傍は，$A \cap B_\varepsilon(P)$.

定義 5.3 X を位相空間，$\mathcal{O}$ をその開集合族とし，$A \subset X$ を任意の部分集合とするとき，A の開集合を

$$\{Y \cap O; O \in \mathcal{O}\}$$

で定めることにより A に位相が定まる．これを X から A への**誘導位相** (induced topology) と呼ぶ．同じ位相は，X の近傍系と A との交わりを A の近傍系と定めることでも入れられる．

誘導位相の言葉を使うと，連結性の定義はすっきりする：

定義 5.4 位相空間 X が連結とは，X の開集合のペア O_1, O_2 で
(1) $O_1 \neq \emptyset, O_2 \neq \emptyset$,
(2) $O_1 \cap O_2 = \emptyset$,
(3) $O_1 \cup O_2 = X$
となるようなものが存在しないことをいう．

系 5.1 位相空間 X が連結とは，$\emptyset$ と X 以外に開かつ閉な部分集合が存在しないことである．位相空間 X の部分集合 A が連結とは，A に誘導位相を与えたとき，定義 5.4 の意味で連結な位相空間となることである．

誘導位相の概念は微積でも暗黙のうちに使われている．

定義 5.5 X, Y を二つの位相空間とする．X の部分集合 A で定義された写像 $f : A \to Y$ が連続とは，X から A への誘導位相の意味で連続なことを言う．すなわち，$\forall P \in A$ に対し，$f(P) \in Y$ の Y における近傍 U を任意に取るとき，P の X における近傍 V が存在し，$f(A \cap V) \subset U$ となること．また，X から Y の部分集合 B への写像 f の連続性の定義も同様に与える．後者は単に, $f : X \to Y$ が連続で, かつ $f(X) \subset B$ というのと同値である．

実数の区間 $[a, b]$ から Y への連続写像を，特に Y の連続曲線という．(日常的には写った像だけを曲線と考えるのが普通だが，数学では写され方も込めて，写像自身を曲線と考える方が普通.)

補題 5.2 X, Y を二つの位相空間，$f : X \to Y$ を連続写像とする．このとき，$A \subset X$ を任意の部分集合とすれば，f を A に制限したもの $f\big|_A$ は A の誘導位相で A から Y への連続写像となる．

系 5.3 $f : X \to Y$ を位相同型写像とするとき, $\forall A \subset X$ に対し，誘導位相の意味で $f\big|_A : A \to f(A)$ も位相同型となる.

定理 5.4 連続写像による連結集合の像は連結となる．

証明 $f : X \to Y$ を連続写像, $A \subset X$ を連結集合とする．$f(A)$ が連結でないとし, Y の開集合のペア O_1, O_2 で,
(1) $f(A) \cap O_1 \neq \emptyset$ (例えば $\ni f(P)$), $f(A) \cap O_2 \neq \emptyset$ (例えば $\ni f(Q)$),
(2) $f(A) \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$,
(3) $f(A) \subset O_1 \cup O_2$
となるようなものが存在したとせよ．このとき，$f^{-1}(O_1), f^{-1}(O_2)$ は X の開集合のペアで,
(1) $A \cap f^{-1}(O_1) \neq \emptyset$ (例えば $\ni P$), $A \cap f^{-1}(O_2) \neq \emptyset$ (例えば $\ni Q$),

(2) $A \cap f^{-1}(O_1) \cap f^{-1}(O_2) = \emptyset$ (もし $\ni R$ なら，$f(R) \in f(A) \cap O_1 \cap O_2$),
(3) $A \subset f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2)$ (明らか)
これは A の連結性の仮定に反する．よって $f(A)$ は連結．　　QED

系 5.5　中間値の定理　連続函数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で $f(a)$ と $f(b)$ の値の中間の値をすべて取る．

証明　$[a,b]$ は連結集合なので，連続函数によるその像は連結．しかるに $\boldsymbol{R}$ の部分集合が連結で，$x<y$ なる 2 点 x,y を含めば，それは区間 $[x,y]$ を含まねばならない．(例 5.1 (2) の証明参照.)

§5.3　弧状連結

$\boldsymbol{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ は連結だが，これを直接定義から示すのは面倒．次の概念が便利：

定義 5.6　位相空間 X の部分集合 A が**弧状連結**とは，$\forall P,Q \in A$ に対し，区間 $[a,b]$ から A への連続写像 f が存在して，$f(a)=P$, $f(b)=Q$ となること．

補題 5.6　弧状連結なら連結である．$\boldsymbol{R}^n$ の開集合に対しては逆も成り立つ．

証明　X を位相空間, $A \subset X$ は弧状連結とする．もし A が連結でないと X の開集合 O_1, O_2 で $A \cap O_1 \neq \emptyset$, $A \cap O_2 \neq \emptyset$ なるものが存在して, $A \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \cup O_2 \supset A$ とできるが，このとき $P \in A \cap O_1$, $Q \in A \cap O_2$ をとれば，仮定により連続曲線弧 $f:[a,b] \to A$ で $f(a)=P$, $f(b)=Q$ なるものが存在する．定理 5.4 より f の像 $C = f([a,b])$ は連結であるが，$P \in C \cap O_1 \neq \emptyset$, $Q \in C \cap O_2 \neq \emptyset$, また，$C \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \cup O_2 \supset C$ は自明なので，矛盾．

逆に，$\boldsymbol{R}^n$ の開集合 $A \subset \boldsymbol{R}^n$ が連結とする．$P \in A$ を勝手に選び，P と連続曲線弧で結べるような点 $Q \in A$ の集合を O_1 とし，A のその他の点の集合を O_2 とする．
(1) O_1 は開集合である．なぜなら，$Q \in O_1$ とすれば，P から Q に到る A 内の連続曲線弧 C が存在する．他方，Q のある ε-近傍 $B_\varepsilon(Q)$ は A に含まれ，その各点 R は Q と半径の線分で結べるので，これを C と繋げることにより，R 自身が P と A 内の連続曲線弧で結べる．よって $B_\varepsilon(Q) \subset O_1$.
(2) O_2 は開集合である．なぜなら，$Q \in O_2$ とし，$B_\varepsilon(Q) \subset A$ を選べば，$B_\varepsilon(Q)$ のどの点 R も P と A 内の連続曲線弧で結べない．(もし結べたら，それと半径の線分を繋げて Q 自身が P と A 内の連続曲線弧で結べてしまうから.) よって $B_\varepsilon(Q) \subset O_2$.
構成の仕方から明らかに $O_1 \cap O_2 = \emptyset$, $O_1 \cup O_2 = A$ なので，以上は A が連結という仮定に矛盾する．　　QED

例 5.2　$\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2; x>0, y=\sin\dfrac{1}{x}\} \cup \{(0,y) \in \boldsymbol{R}^2; -1 \le y \le 1\}$ は連結だが弧状連結でない．

定義 5.7　連結でない集合に対しては，その極大連結部分集合を X の**連結成分**と呼ぶ. ~~位相空間自身のとき (あるいは部分集合でも誘導位相で考えたとき)，これは連結部分集合で開かつ閉なるものと一致する.~~

例 5.3　(1) 目で見て二つに分かれているもの，例えば, $\boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ は連結でなく，二つの連結成分 $\{x>0\}$ と $\{x<0\}$ より成る．
(2) 整数の集合を実数の部分集合とみたとき，これは連結でない．各点が連結成分となる．
(3) 区間 $[0,1]$ の有理数の集合は連結でない．その各点が連結成分となる．

問題 5.3　$\boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}^2$ が位相同型でないことを，次の手順で示せ．
(1) $f:\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}$ という位相同型が存在すれば, $f\big|_{\boldsymbol{R}^2\setminus P} : \boldsymbol{R}^2 \setminus P \to \boldsymbol{R} \setminus f(P)$ も位相同型となる．
(2) $\boldsymbol{R}^2 \setminus P$ は連結である．
(3) $\boldsymbol{R} \setminus f(P)$ は連結でない．