第 6 章　コンパクト性

§6.1　孤立点・集積点・稠密性

定義 6.1　位相空間 X の部分集合 E に対して, $P \in X$ が**孤立点** (isolated point) とは，P のある近傍 U を取れば，$E \cap U = \{P\}$ となること，i.e. P の近くには P 以外の E の点が存在しないことをいう．位相空間 X の部分集合 E に対して, P が**集積点** (accumulation point, cluster point) とは，P の任意の近傍 U に対して $(U \setminus \{P\}) \cap E \neq \emptyset$ となること．

P が集積点というときは，P 自身は E に属さなくてもよい．

定義から明らかに，X の部分集合 E の境界は，E の孤立点及び E の集積点で，E の内点ではないものから成る．特に，E の孤立点は (それが全空間の孤立点でない限り) 必ず E の境界に含まれる．また，$\overline{E}$ の点は，E の点であるか，E の集積点である．

補題 6.1　X を距離空間とするとき，P が E の集積点なら，P のどの近傍も E の点を無限個含む．

証明　もし，ある近傍 U について $U \cap E$ が有限個だとすると, それらのうちで P に最も近いものと P との距離を a とすれば，P の a-近傍と U の交わりはもはや P 以外の E の点を含まない P の近傍となり，矛盾．

問題 6.1　次の集合の孤立点，集積点を挙げよ．

(1) $\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \ ; \ y^2 = x^2(x-1)\}$　(2) $\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \ ; \ 0 \leq x < 1,\ 0 \leq y < 1,\ x \in \boldsymbol{Q},\ y \in \boldsymbol{Q}\}$
(3) $\{x \in \boldsymbol{R} \ ; \ \exists n \in \boldsymbol{N} \text{ s.t. } nx = 1\}$　(4) $\{(x,y) \in \boldsymbol{R}^2 \ ; \ (x,y) = (0,0)$ または $x = 1$ または $y > 1\}$

定義 6.2　位相空間 X の二つの部分集合 $Z \subset Y$ について，Z が Y で稠密とは, $\overline{Z} \supset Y$ となることを言う．

補題 6.2　$f : X \to Y$ を連続写像，$E \subset X$ を部分集合とするとき，$f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$.

証明　$P \in \overline{E}$ をとる．$P \in E$ なら，$f(P) \in f(E) \subset \overline{f(E)}$. また P が E の集積点なら，P の任意の近傍は E と交わる．このとき，$f(P)$ の任意の近傍 U について，$f^{-1}(U)$ は P の近傍となり，従って E の点 Q を含む．このとき $f(Q) \in U \cap f(E)$. 従って $f(P) \in \overline{f(E)}$.　　QED

この主張は，X, Y が距離空間のときは，点列を用いた分かりやすい証明ができる．

問題 6.2　(1) $\boldsymbol{Q}$ は $\boldsymbol{R}$ の中で稠密な部分集合を成す．
(2) 分母が 3 の冪であるような有理数は $\boldsymbol{R}$ で稠密である．

§6.2　コンパクト集合

コンパクト集合は，$\boldsymbol{R}^n$ の有界集合が持つ種々のよい性質を抽象化した概念である．

定義 6.3　位相空間 X の部分集合 E に対して，X の部分集合の族 $\{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ が E の**被覆**であるとは，$\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supset E$ となることを言う．すべての U_λ が開集合のとき**開被覆**と言う．

定義 6.4　位相空間 X の部分集合 K がコンパクトであるとは，K の任意の開被覆が有限個の部分被覆に減らせること，i.e. $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \supset K$ で，すべての U_λ が開集合なら，$U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n}$ を適当に抜き出して，$U_{\lambda_1} \cup \ldots \cup U_{\lambda_n} \supset K$ とできること，を言う．

補題 6.3 位相空間 X の部分集合 K がコンパクトであることは，次の主張と同値である：
X の閉集合の族 $\mathcal{Z} = \{Z_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ について，もし $\mathcal{Z}$ の任意有限個の元 $Z_{\lambda_1},\dots,Z_{\lambda_n}$ について $Z_{\lambda_1} \cap \cdots \cap Z_{\lambda_n} \cap K \neq \emptyset$ (有限交差性を持つ) なら，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda \cap K \neq \emptyset$ である．

証明 一般に，

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap B = \emptyset &\Longleftrightarrow \complement A_1 \cup \complement A_2 \cup \cdots \cup \complement A_n \cup \complement B = X \quad (\text{全空間}) \\ &\Longleftrightarrow \complement A_1 \cup \complement A_2 \cup \cdots \cup \complement A_n \supset B \end{aligned}$$

に注意せよ．この同値性は A_i が無限個有っても成り立つ．さて，開被覆が必ず有限個に減らせると仮定して，有限交差性を持つ閉集合の族 $Z_\lambda, \lambda \in \Lambda$ が与えられたとき，上の等式の無限個バージョンより，

$$\text{もし} \quad \bigcap_{\lambda \in \Lambda} Z_\lambda \cap K = \emptyset \quad \text{なら} \quad \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \complement Z_\lambda \supset K.$$

よって仮定により，ある $Z_{\lambda_1},\dots,Z_{\lambda_n}$ を取れば，

$$\complement Z_{\lambda_1} \cup \cdots \cup \complement Z_{\lambda_n} \supset K, \quad \text{従って} \quad Z_{\lambda_1} \cap \cdots \cap Z_{\lambda_n} \cap K = \emptyset.$$

これは仮定に反する．逆向きもこの議論を逆にたどればよい． QED

補題 6.4 位相空間 X のコンパクト集合 K の閉部分集合 L は，再びコンパクトとなる．

証明 L の仮定は X の閉部分集合 Z が存在して $L = Z \cap K$ となっていることを意味する．このとき，L の任意の開被覆 $U_\lambda, \lambda \in \Lambda$ に対して，$V = \complement Z$ を追加したものは K の開被覆となる．(実際，K の点で L に属するものは U_λ のどれかに含まれ，属さないものは V に含まれるから．) よって，K のコンパクト性により、この被覆は有限個に減らせる．それから更に V を省いたものは L の被覆となっている．(実際，V は L を覆うのには何も寄与しないので，省いても同じである．また，V を省いたものが L の点を覆えていなければ，V を合わせても覆えていなかったことになる．) よって L もコンパクトの条件を満たす． QED

この逆は一般の位相空間では必ずしも成り立たないが，“普通の” 位相空間では成り立つ．特に：

補題 6.5 距離空間 X のコンパクトな部分集合は X の閉集合である．

証明 もし K が閉でないと，その境界点で K に属さぬもの P がある．今，K の各点 Q に対して，Q の開近傍 U_Q を P のある近傍 V_P^Q と交わらないように選ぶ．距離空間の場合，これは $U_Q = B_{\mathrm{dis}\,(P,Q)/2}(Q)$, $V_P^Q = B_{\mathrm{dis}\,(P,Q)/2}(P)$ とすればよい．このとき，$\{U_Q, Q \in K\}$ は K の開被覆となるが，そこから有限個 $U_{Q_1},\dots,U_{Q_n}$ を取ると，P の近傍 $\bigcap_{i=1}^n V_P^{Q_i}$ に含まれる K の点が必ず覆えずに残る．よって K はコンパクトでなかったことになり，不合理． QED

上で下線を引いた性質は次章で解説する Hausdorff の分離公理に他ならない．上の主張はこれだけを仮定すれば証明できる．

補題 6.6 距離空間 X のコンパクトな部分集合 K を開集合 U が含んでいれば，U は K のある ε-近傍

$$\{Q \in X \,;\, \mathrm{dis}\,(Q,K) < \varepsilon\}$$

を含む．ここに

$$\mathrm{dis}\,(Q,K) := \sup_{R \in K} \mathrm{dis}\,(Q,R)$$

は点と集合との距離を表す．

証明 仮定により K の各点 P に対して，そのある ε_P-近傍が U に含まれる．K はコンパクトなので，これらのうちの有限個で K が覆える．よってそれら有限個の近傍の半径の最小値を ε とすれば，K の任意の点の ε-近傍は U に含まれる．よって上の意味で, K の ε-近傍が U に含まれる． QED

問題 6.3 K がただの閉部分集合では上の主張は成り立つとは限らない．$\boldsymbol{R}^2$ で反例を与えよ．

次の定理はコンパクト性の概念の元になった微積の結果です．

定理 6.7 (Heine-Borel の被覆定理) $\boldsymbol{R}^n$ の有界閉集合はコンパクトである．逆に，$\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト集合は有界かつ閉である．

証明 任意の有界集合は閉直方体で覆えるので，K を閉直方体

$$K_n = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

と仮定して証明すれば，補題 6.4 により一般に成り立つ．まず，1 次元閉区間 $[a, b]$ のとき，開被覆 $U_\lambda, \lambda \in \Lambda$ が与えられたとして，これをどう有限個に減らしても $[a, b]$ 全体を覆えないと仮定せよ．a を含む開被覆の元は必ず存在するので, このとき $[a, c]$ が有限個で覆えるような c には上限 μ が存在し，$a < \mu \leq b$ である．μ を含む元 U' も存在し，これも開集合なので, もし $\mu < b$ なら $\exists c < \mu \leq \exists c'$ について, $[c, c']$ を含む．すると，$[a, c]$ を覆っていた有限個の被覆の元にこの U' を追加した有限個は μ を込めて (もし有れば) その少し先 $[a, c']$ まで覆えることになり, μ の定義に反する．

次に $\boldsymbol{R}^n$ まで証明できたとして， $\boldsymbol{R}^{n+1}$ を考える．

$$K_{n+1} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \times [a_{n+1}, b_{n+1}] = K_n \times [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

の開被覆 $\{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ を取る．これと $x_{n+1} = a_{n+1}$ の交わりは, ($K \times \{c\}$ の K との同一視による自明な意味で) K_n の開被覆を定めるので，帰納法の仮定により，適当な有限個の $U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_N}$ で $K \times \{a_{n+1}\}$ は覆える．そこで今，$K \times [a_{n+1}, c]$ が有限個で覆えるような c の上限 μ を考えると，$K \times \{\mu\}$ も帰納法の仮定により，この被覆の他の有限個で覆える．従ってこれらすべてを合併したものは，$K \times [a_{n+1}, \mu]$ を含む開集合となるが，補題 6.6 より，これは $K \times [a_{n+1}, \mu]$ のある ε-近傍を含む．よって，もし $\mu < b_{n+1}$ なら，更に $\exists c' >$ について $K \times [a, c']$ を覆う．これは μ の定め方に反する．

逆は，コンパクトなら閉であることがすでに補題 6.5 で一般の距離空間に対して示されているので，有界なことを言えばよい．背理法により，K が有界でないとすると，

$$U_i = \{x \in \boldsymbol{R}^n \ ; \ i - 1 < |x| < i + 1\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

は K の開被覆で，有限個には減らせないものとなり，矛盾． QED

一般の距離空間ではコンパクト $\Longrightarrow$ 有界閉は正しい (上の証明はそのまま通用する) が，逆は必ずしも成り立つとは限らない．

微積では，コンパクト性をしばしば点列の言葉で表現します．次はその抽象化：

定義 6.5 K の任意の点列が，K で収束する部分列を含むとき，K は**点列コンパクト**であるという．

定理 6.8 任意の位相空間において，点列コンパクトならコンパクトである．逆に，距離空間の部分集合 K については，コンパクトなら点列コンパクトとなる．

証明 (コンパクト $\Longrightarrow$ 点列コンパクト) K をコンパクト集合とし，K の点列 P_n を任意に取る．P_n は点として異なるものが無限に存在すると仮定しても一般性を失わない．(さもなくば，無限に再現する点の一つで部分列を作れば，それは明らかにその定点に収束する.) まず，この点列は K 内に集積点を持つことを示す．(ここまでは距離空間の仮定は無くても言える.) 背理法を用い，K のどの点にも集積しないとすると，K のどの点 Q にも，ある開近傍 U_Q が存在して, U_Q は P_n の点を (たまたま Q と一致した場合の) 高々 1 個しか含まない．K はこのような U_Q で覆われるから，コンパクトの仮定より，これらの有限個 $U_{Q_i}, i=1,2,\dots,n$ で覆われる．すると，P_n はこれらに入るものすべてを合わせても有限個しか無かったことになり，仮定に反する．

次に，K が距離空間の部分集合なら (あるいはより一般に，各点が可算個の近傍より成る基本近傍系を持つという**第一可算公理** (第 9 章参照) を満たしていれば)，P_n の集積点 P に収束する部分列が取れることを示す．補題 6.1 の証明と同様，このとき P の任意の近傍は P_n の点を無限個含むので，P の基本近傍系 $U_k = B_{1/k}(P)$ の各元に対し，$P_{n_k} \in U_k$ を，$n_k > n_{k-1}$ を満たすように帰納的に選べる．この部分列は明らかに P に収束する．

(点列コンパクト $\Longrightarrow$ コンパクト) X を一般の位相空間, $K \subset X$ を点列コンパクトとせよ．背理法により，K の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ で，有限個に減らせないものが有ったとし，余計なものを省いてゆき，これ以上減らせないところまで減らしたものを同じ記号で書くことにする．このようなものの存在は直感的には明らかであろうが，無限集合論の Zorn(ツォルン)の補題を用いて次のように厳密に示せる：添え字の部分集合 $M \subset \Lambda$ で，$\{U_\mu, \mu \in M\}$ が X の被覆となるようなものから成る集合 $\mathcal{M}$ を考えると，これは Λ 自身を含むので空ではない．更に $M \subset M'$ のとき $M \geq M'$ と順序を定めると，**帰納的順序集合**となること，すなわち，全順序部分集合 $M_\nu, \nu \in N$ が有ったときに，これらの上限，すなわち $\bigcap_{\nu \in N} M_\nu$ がまた $\mathcal{M}$ に含まれることは,

$$\bigcap_{\nu \in N} \bigcup_{\mu \in M_\nu} U_\mu \supset X$$

より明らかである．従って Zorn の補題により，$\mathcal{M}$ には $\leq$ に関する極大元, すなわち，包含関係でこれ以上小さいものが存在しないような元 M_0 が存在するが，これがまさに，もはや一つも省けない X の被覆となる．

このとき，各 $U_\mu, \mu \in M_0$ には，他の被覆の元のどれにも属さないような点 P_μ が存在する．(さもなければ，この U_μ は省略できるから.) $\{P_\mu, \mu \in M_0\}$ から (選出公理により) 適当に抜き出した点列 $\{P_{\mu_n}\}$ は，仮定により収束部分列を含む．その極限 P は K の点なので，ある U_μ に含まれるが，番号の大きな部分列の項は，この開集合に属さねばならず，各 U_μ に一つしか含まれないように取ったという仮定に矛盾する．　　QED

定義 6.6 X の部分集合 K の閉包がコンパクトのとき，K は**相対コンパクト**であるという．

系 6.9 (Bolzano-Weierstrass の定理) $\boldsymbol{R}^n$ の有界集合は相対コンパクトである．あるいは，任意の有界列は収束部分列を含む．あるいは，有界な無限集合は集積点を持つ．

§6.3 コンパクト性と連続写像

定理 6.10 コンパクト集合の連続写像による像は再びコンパクトとなる．

証明 $f : X \to Y$ を連続写像，$K \subset X$ をコンパクト集合とする．$f(K)$ の Y における開被覆 $\{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ を取るとき，$\{f^{-1}(U_\lambda), \lambda \in \Lambda\}$ は X における K の開被覆となる．よってそのうちの有限個 $f^{-1}(U_{\lambda_i}), i = 1,\dots,n$ で K が覆える．このとき明らかに $f(K)$ は $U_{\lambda_i}, i = 1\dots,n$ で覆われる．(一般に，

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B), \quad A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B), \quad f(f^{-1}(B)) \subset B, \quad f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$$

が成り立つことに注意.)　　QED

系 6.11 連続関数はコンパクト集合の上で最大値に到達する.

証明 連続関数 f は $\boldsymbol{R}$ への連続写像なので，その値域 $f(K)$ は前定理により $\boldsymbol{R}$ のコンパクト集合，従って有界閉集合となる．よって，最大元があり，それが f の最大値である．　　QED

補題 6.12 $f : X \to Y$ を連続写像とし，Y は距離空間 (あるいは, より一般に Hausdorff 空間) とする．このとき，f を X のコンパクト集合 K に制限したもの $f\big|_K$ は閉写像となる．特に，f が K 上一対一なら，逆写像 $f^{-1} : f(X) \to K$ は連続となる.

証明 K の任意の閉集合 Z は補題 6.4 により再びコンパクト．従ってその像 $f(Z)$ はコンパクトであり，従って，仮定と補題 6.5 より閉である．更に f^{-1} が存在するときは，これから閉集合の逆像による連続性の条件が従う．　　QED

問題 6.4 距離空間 X にコンパクト集合 K とその外の点 P があるとき，$d = \mathrm{dis}\,(P, K)$ を達成する点 $Q \in K$ が存在することを示せ．また，K が閉集合というだけでは反例があることも示せ.

第 7 章　分離公理

§7.1　Hausdorff 性

定義 7.1 (Hausdorff 性) 位相空間 X が Hausdorff の分離公理を満たす，あるいは Hausdorff である, または T2 分離公理を満たすとは，X の異なる任意の 2 点 P, Q に対し，それぞれの近傍 U, V を適当に選ぶと，$U \cap V = \emptyset$ とできることをいう.

例 7.1 (1) 距離空間は Hausdorff である．実際，$d(P, Q) = a$ とすれば, U, V としてそれぞれの点の $a/2$-近傍をとればよい.