(2) 離散位相は Hausdorff である．実際，$\{P\}$, $\{Q\}$ がそれぞれの点の近傍だから，確かに交わらない．
(3) $\boldsymbol{R}^2$ の Zariski 位相は Hausdorff でない．実際，任意の 2 点 P, Q について，これらの近傍はそれぞれの点を含む Zariski 開集合, U, V, すなわち，それぞれ $U = \mathsf{C}\{f_i(x,y) = 0, i = 1, \ldots, m\}$, $V = \mathsf{C}\{g_j(x,y) = 0, j = 1, \ldots, n\}$ の形をしているので，共通部分は

$$U \cap V = \mathsf{C}\{f_i(x,y)g_j(x,y) = 0, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n\}$$

となり，常に $\neq \emptyset$.
(4) 密着位相は Hausdorff でない．これは明らか.

定義 7.2 位相空間 X が T1 分離公理を満たすとは，X の任意の 2 点 P, Q に対し，P の近傍で Q を含まないものが存在することを言う.

明らかに，T2 $\Longrightarrow$ T1.

例 7.2 (1) $\boldsymbol{R}^2$ の Zariski 位相は T1 を満たす．実際，$\forall P, Q$ に対し，$f(P) = 0$, $f(Q) \neq 0$ となる多項式 f が存在する (x, y 座標関数のいずれかを $f(x,y)$ とすることができる).
(2) 密着位相は T1 も満たさない．これは明らか.

補題 7.1 位相空間 X において，1 点より成る部分集合が閉集合となるためには，T1 分離公理が満たされていることが必要かつ十分である.

証明 T1 を満たす位相空間 X では, $\{P\}$ は閉集合となることを示す．これには $X \setminus \{P\}$ が開集合となることを示せばよい．$\forall Q \in X \setminus \{P\}$ は $Q \neq P$ を満たすので，Q のある近傍 U で P を含まぬものが存在する．すなわち $U \subset X \setminus \{P\}$. 故に $X \setminus \{P\}$ は開集合.
　逆に，任意の孤立点集合が閉集合とするとき，$X \setminus \{P\}$ は開集合で，これは $\forall Q \neq P$ の一つの近傍であり P を含まない.　　QED

問題 7.1 (1) 補題 6.1 を X が T1 という仮定だけから証明せよ.
(2) 補題 6.5 を X が T2 という仮定だけから証明せよ.

§7.1　正則空間と正規空間

定義 7.3 X が T3 $\Longleftrightarrow$ X の任意の閉集合 Z と任意の点 $P \notin Z$ に対して，開集合 U, V が存在し，$U \supset Z$, $V \ni P$, $U \cap V = \emptyset$ となること (i.e. 閉集合と点が開集合で分離できること) をいう．X が**正則**とは, T1 かつ T3 なること.

補題 7.2 正則空間においては，任意の点は閉集合より成る基本近傍系を持つ.

証明 U を点 P の任意の開近傍とし，この中に閉近傍が作れることを示す．$\mathsf{C}U$ は閉集合なので，正則空間の定義により, 開集合 $O \supset \mathsf{C}U$ と P の近傍 V で，交わりを持たないものが存在する．$\overline{V}$ は P の閉近傍であり，閉集合 $\mathsf{C}O$ に含まれるので, $\mathsf{C}(\mathsf{C}U) = U$ にも含まれる.　　QED

定義 7.4 X が T4 $\Longleftrightarrow$ X の任意の二つの交わらない閉集合 Z_1, Z_2 に対して，開集合 U, V が存在し，$U \supset Z_1$, $V \supset Z_2$, $U \cap V = \emptyset$ となること (i.e. 二つの閉集合が開集合で分離できること) をいう．X が**正規**とは, T1 かつ T4 なること.

明らかに，正規 $\Longrightarrow$ 正則 $\Longrightarrow$ Hausdorff であるが，T4 $\Longrightarrow$ T3 $\Longrightarrow$ T2 とは限らない．これは T1 を仮定しないと，1 点が閉集合とは限らないからである.

例 7.3 距離空間は正規である．実際，Z_1, Z_2 を任意の交わらない閉集合とするとき，$\forall P \in Z_1$

に対して，$d_P = \mathrm{dis}\,(P, Z_2) > 0$ なので，P の $\dfrac{1}{2}d_P$ 近傍を U_P と置く．同様に，$\forall Q \in Z_2$ に対して，$d_Q = \mathrm{dis}\,(Q, Z_1) > 0$ なので，Q の $\dfrac{1}{2}d_Q$ 近傍を V_Q と置く．このとき，

$$O_1 = \bigcup_{P \in Z_1} U_P, \qquad O_2 = \bigcup_{Q \in Z_2} V_Q$$

は，それぞれ Z_1, Z_2 の近傍となるが，互いに交わらない．実際，もし交点 R があると，それはある U_P, V_Q に同時に属する．このとき，

$$\mathrm{dis}\,(P, Q) \le \mathrm{dis}\,(P, R) + \mathrm{dis}\,(Q, R) < \frac{1}{2}\{\mathrm{dis}\,(P, Z_1) + \mathrm{dis}\,(Q, Z_2)\} \le \max\{\mathrm{dis}\,(P, Z_1), \mathrm{dis}\,(Q, Z_2)\}$$

となるが，明らかに $\mathrm{dis}\,(P, Q) \ge \mathrm{dis}\,(P, Z_1), \mathrm{dis}\,(Q, Z_2)$ なので不合理． QED

定理 7.3 (Urysohn の補題) X が正規 $\Longleftrightarrow$ X の任意の二つの交わらない閉集合 Z_1, Z_2 に対して Z_1 上 0，Z_2 上 1 となる X の連続関数が存在する．

証明 十分性は明らか．実際，このような連続関数 f が存在したら，

$$U = \{P \in X\,;\, f(P) < 0.5\}, \qquad V = \{P \in X\,;\, f(P) > 0.5\}$$

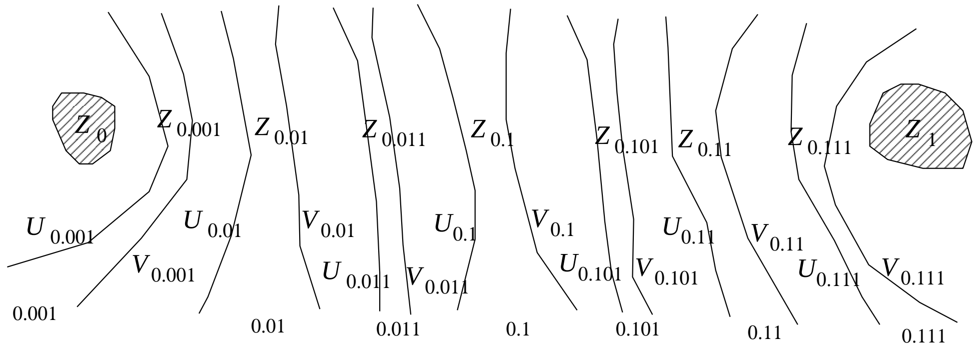
が分離開集合となる．逆に，X を正規空間とし，記号を少し変えて Z_0, Z_1 を交わらない閉集合とする．所望の関数 f を少しずつ定義してゆく．

まず，Z_0 上 $f = 0$, Z_1 上 $f = 1$ と定める．次に，仮定により交わらない開集合 $U_{0.1}, V_{0.1}$ が存在し，$U_{0.1} \supset Z_0$, $V_{0.1} \supset Z_1$ となる．$Z_{0.1} = \complement U_{0.1} \cap \complement V_{0.1}$ は閉集合で，$X = U_{0.1} \cup Z_{0.1} \cup V_{0.1}$ は分割となる．よって，$Z_{0.1}$ 上 $f = \dfrac{1}{2}$, 二進小数表示で 0.1 と定める．次に，Z_0 と $\complement U_{0.1}$ を分離する開集合 $U_{0.01}, V_{0.01}$ が存在する．$Z_{0.01} = \complement U_{0.01} \cap \complement V_{0.01}$ と置けば，$X = U_{0.01} \cup Z_{0.01} \cup V_{0.01}$ となり，$Z_{0.1} \subset V_{0.01}$ なので $Z_{0.01}$ 上二進小数で $f = 0.01$ と置けば矛盾しない．同様に，$\complement V_{0.1}$ と Z_1 を分離する交わらない開集合 $U_{0.11}, V_{0.11}$ を取り，$Z_{0.11} = \complement U_{0.11} \cap \complement V_{0.11}$ と置いて，この上で二進小数の意味で $f = 0.11$ と定める．以下この操作を無限に繰り返す．

X のすべての点 P で f の値が定まることを見よう．上の操作において，ある有限の段階で $P \in Z_a$, a は (小数点以下) n 桁の二進有限小数 (以下最下位桁は常に 1 とする), となるならば，$f(P) = a$ と確定する．もし n 桁以下の任意の二進有限小数 a について Z_a の形のどの集合にも P が含まれなければ，各 n について n 桁のある a が存在し $P \in V_a \cap U_{a+1/2^n}$ か $P \in V_{a-1/2^n} \cap U_a$ かのいずれかであり，従って区間 $[a - 1/2^n, a + 1/2^n]$ の $n \to \infty$ のときの縮小列の極限として $f(P)$ の値が確定する．

最後にこうして定まった f が連続であることを見る．f の値の定め方から，$P \in Z_a$ のときは，a の桁数より大きな $\forall n$ について，$Z_a \subset V_{a-1/2^n} \cap U_{a+1/2^n}$ となるので，P の近傍を $V_{a-1/2^n} \cap U_{a+1/2^n}$ (に入るような小さなもの) とすれば，その任意の点 Q で $a - 1/2^n < f(Q) < a + 1/2^n$ となる．従って $|f(P) - f(Q)| < 1/2^n$ となる．また，P が極限点のときも同様の評価が示せる．よって f は連続である． QED

上の構成で得られた f は最初から $[0, 1]$-値なことは明らかであるが，もしそうでない f が与えられたときは，いつでもそれを $g(P) = \min\{\max\{f(P), 0\}, 1\}$ と修正することにより $[0, 1]$-値の連続関数に修正できる．また，更に $h(P) = 2g(P) - 1$ を考えることにより，$[-1, 1]$-値の関数で，Z_1 上 -1, Z_2 上 1 となるものも作れる．相似変換により，$\forall a > 0$ について，$[-a, a]$-値のものにできる．



定理 7.4 (Tietze の拡張定理) X が正規 $\Longleftrightarrow$ X の任意の閉集合 Z について，Z 上定義された連続関数が全空間の上の連続関数まで拡張できる．

証明 (十分性) Z_1, Z_2 を交わらない閉集合とする．Z_1 上恒等的に 0, Z_2 上恒等的に 1 に等しい関数は，明らかに閉集合 $Z = Z_1 \cup Z_2$ 上定義された連続関数なので，仮定により全空間の連続関数 f に拡張できる．よって Urysohn の定理の結論が満たされたから X は正規となる．
(必要性) Z 上の連続関数 $f(P)$ の代わりに合成関数 $g(P) = \dfrac{2}{\pi}\mathrm{Arctan}\, f(P)$ を考えると，$-1 < g(P) < 1$ となる．よって $(-1,1)$ に値を取る連続関数 g が $(-1,1)$ に値を取る連続関数 $\widetilde{g}$ として全空間に拡張できることを示せば，$\widetilde{f}(P) = \tan(\dfrac{\pi}{2}\widetilde{g}(P))$ は元の関数 f の連続拡張となる．よって以後，最初から f の値は $(-1,1)$ に収まっていると仮定する．

連続関数の性質により，

$$Z_1 = \{P \in Z\,;\, f(P) \le -\frac{1}{3}\}, \qquad Z_2 = \{P \in Z\,;\, f(P) \ge \frac{1}{3}\}$$

はいずれも閉集合となり，互いに交わらないので，Urysohn の補題 (とその後の注意) により，Z_1 上 $-\dfrac{1}{3}$, Z_2 上 $\dfrac{1}{3}$ に等しいような X 上定義された連続関数 g_1 で $[-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}]$ 値のものが存在する．これは明らかに，Z 上至るところで $|f(P) - g_1(P)| \le \dfrac{2}{3}$ を満たす．同じ操作を $f(P) - g_1(P)$ と $[-\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}]$ に適用して，X 上の連続関数 g_2 で $[-\dfrac{2}{9}, \dfrac{2}{9}]$-値，かつ Z 上 $|f(P) - g_1(P) - g_2(P)| \le \dfrac{4}{9}$ となるものが作れる．以下これを繰り返すと，関数の列 g_n, $n = 1, 2, \dots$ で，

$$-\frac{2^{n-1}}{3^n} \le g_n(P) \le \frac{2^{n-1}}{3^n} \ \text{ on } \ X, \qquad |f(P) - \sum_{k=1}^{n} g_k(P)| \le \frac{2^n}{3^n} \ \text{ on } \ Z$$

となるものが構成できる．この不等式から，級数

$$g(P) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k(P)$$

は X 上一様収束し，従って X 上の連続関数を定めることが分かる．また，第 2 の不等式から極限に行って $|f(P) - g(P)| = 0$, i.e. $f(P) = g(P)$ が Z 上成り立つ．

以上の証明では，途中の部分和 $\sum_{k=1}^{n} g_k(P)$ の値は $(-1,1)$ に収まっているが，極限において $g(P) = \pm 1$ となる点が生ずるかもしれない．しかし，

$$Z_3 = \{P \in X\,;\, g(P) = 1 \text{ または } g(P) = -1\}$$

という集合は閉であり，かつ仮定により Z と交わらないので，再び Urysohn の補題を用いて, Z 上 1, Z_3 上 0 に等しいような連続関数 h を作り, 積 $g(P)h(P)$ を考えれば，f の連続拡張で，値が $(-1,1)$ に収まるものが得られ，tan で元に戻せる．　　QED

問題 7.2 上の証明中に次の事実を用いたが，これは微分積分学における対応する定理 (Weierstrass の定理) と同様の証明で示すことができる．微積の復習としてやってみよ．

定義 7.5 位相空間 X 上の実数値関数の列 f_n が X で一様 Cauchy 列を成すとは，

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_\varepsilon\ \ \text{s.t.}\ \ n,m\geq n_\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \forall P\in X\ \ |f_n(P)-f_m(P)|<\varepsilon$$

となること，i.e. Cauchy 列の判定における相互の近づき方が P の位置によらず，空間で一様であること，を言う．

補題 7.5 実数値関数の一様 Cauchy 列は一様収束する．

定義 7.6 位相空間 X 上の実数値関数の列 f_n が X で極限関数 $f(x)$ に一様収束するとは，

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists n_\varepsilon\ \ \text{s.t.}\ \ n\geq n_\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \forall P\in X\ \ |f_n(P)-f(P)|<\varepsilon$$

となること，i.e. 収束の速さ ($=\varepsilon$ に対する n_ε の大きくなり方) が P の位置によらず，空間で一様であること，を言う．

補題 7.6 位相空間 X 上の連続関数の列が X で一様収束していれば，極限関数は連続となる．

問題 7.3 微分積分学の復習として次を示せ：
(1) (Heine の定理) 連続関数は距離空間のコンパクト集合上一様連続である．
(2) (Dini の定理) 連続関数がコンパクト集合上連続関数に各点収束していれば，実は一様収束している．

第 8 章　誘導位相

第 5 章で，部分集合への誘導位相を学んだが，ここでそれを一般化する．

§8.1　直積位相

定義 8.1 X, Y を位相空間とするとき，直積集合 $X\times Y$ の開集合の基として，

$$\{U\times V\,;\,U\text{ は }X\text{ の開集合},\,V\text{ は }Y\text{ の開集合}\,\}$$

をとったものから定義される位相を，X, Y の**直積位相**と呼ぶ．これは，$(P,Q)\in X\times Y$ の基本近傍系として

$$\{U\times V\,;\,U\text{ は }P\text{ の近傍},\,V\text{ は }Q\text{ の近傍}\,\}$$

をとったものから定義される位相と一致する．

例 8.1 $\boldsymbol{R}^2$ の位相は $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ の直積位相に他ならない．

補題 8.1 直積からもとの成分への射影 $\mathrm{pr}_X : X\times Y\to X$, $\mathrm{pr}_Y : X\times Y\to Y$ は開写像である．

証明 W を $X\times Y$ の開集合とする．$\forall(P,Q)\in X\times Y$ について，直積位相の定義により，$P\in X$ の開近傍 U, $Q\in Y$ の開近傍 V が存在し，$U\times V\subset W$ となる．このとき, $\mathrm{pr}_X(W)\supset U\ni P$ となるから，pr_X による W の像は X の開集合となる．pr_Y についても同様．　　QED

§8.2 商位相

定義 8.2 X を位相空間，$\sim$ をその上に定義された同値関係とし，$\rho : X \to Y$ をそれから自然に定まる写像 (i.e. 元に対してそれが属する同値類を対応させる写像) とする．このとき，商集合 $Y = X/\sim$ に

$$U \subset Y \text{ が開集合} \iff \rho^{-1}U \text{ が開集合}$$

で定まる開集合族により定まる位相を**商位相**と呼ぶ.

§8.3 連続写像と誘導位相

定義 8.3 X を位相空間，Y を集合とし，$f : X \to Y$ を写像とする．このとき，Y の開集合の族を

$$U \subset Y \text{ が開集合} \iff f^{-1}U \text{ が開集合}$$

で定義することにより Y に位相が定まる．これを X から f により Y に誘導された位相, あるいは f による像位相と呼ぶ.

定義 8.4 X を集合，Y を位相空間とし，$f : X \to Y$ を写像とする．このとき，X の開集合の族を

$$\{f^{-1}U \,;\, U \text{ は } Y \text{ の開集合}\}$$

で定義することにより X に位相が定まる．これを Y から f により X に誘導された位相, あるいは f による引き戻し位相と呼ぶ.

例 8.2 (1) 位相空間 X の部分集合 K への誘導位相は，埋め込み写像 $f : K \to X$ による X の位相の引き戻しに他ならない.