(2) 商位相は，自然な写像 ρ によるもとの位相の像位相に他ならない．逆に，任意の写像 $f: X \to Y$ による X の像位相は $P \sim Q \iff f(P) = f(Q)$ という同値関係による商位相と一致する．

問題 8.1 $X \times Y$ に X, Y の直積位相を入れたとき，自然な射影 pr_X による $X \times Y$ の X への像位相は，X の元の位相と一致するか？

Y が Hausdorff なら，写像 $f: X \to Y$ による引き戻し位相で X は Hausdorff となる．しかし，X が Hausdorff であっても，$f: X \to Y$ による像位相で Y は Hausdorff とは限らない．

定義 8.5 集合 X の二つの位相 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ の強弱関係を，次の同値な条件のいずれかで定める．

$$\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2 \quad \iff \quad \mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \quad \iff \quad \text{恒等写像}\ \ (X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)\ \ \text{が連続}$$

補題 8.2 $f: X \to Y$ により X から Y に誘導される位相は，Y の位相の中で f を連続写像とするようなもののうち最強のものである．また，$f: X \to Y$ により Y から X に誘導される位相は，X の位相の中で f を連続写像とするようなもののうち最弱のものである．

補題 8.3 $X \times Y$ の直積位相は，二つの射影 $p_1: X \times Y \to X$, $p_2: X \times Y \to Y$ をどちらも連続にするような最弱の位相である．

例 8.3 どんな集合 X においても，離散位相は最強，密着位相は最弱である．

位相の強弱関係は束を成す．X の二つの位相 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ に対し，その sup, inf はそれぞれ対応する開集合族の和集合，共通部分，で定義される．

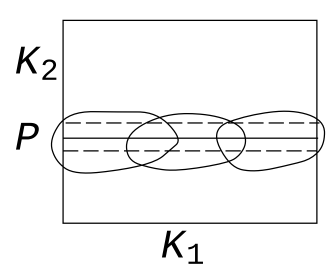
§8.4 位相空間の無限直積

定義 8.6 定義 8.1 よりも一般に, 位相空間の族 $X_\lambda, \lambda \in \Lambda$ に対しそれらの直積集合 $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ の直積位相を, すべての射影 $p_\lambda: X \to X_\lambda$ が連続となるような最弱位相と定義する．

補題 8.4 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ の開集合の基は，$\prod_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ の形の集合で与えられる．ここに，O_λ は X_λ の開部分集合で，有限個を除き全空間 X_λ と一致するようなものである．

定理 8.5 (Tihonov の定理) コンパクト集合の無限直積はコンパクトとなる．この主張は，選出公理と同値である．

証明 二つのコンパクト集合の直積はコンパクトである．実際，K_1, K_2 をコンパクトとし $K_1 \times K_2$ の任意の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ をとる．今 $P \in K_2$ を任意に固定するとき，$K_1 \times \{P\} \subset K_1 \times K_2$ はもちろん $\mathcal{U}$ で覆われるが，これは K_1 と位相同型，従ってコンパクトなので，このうちの有限個 $U_{P1}, \ldots, U_{Pn_P}$ で覆われる．射影 $\mathrm{pr}_2: K_1 \times K_2 \to K_2$ は開写像なので，$\mathrm{pr}_2 U_{Pj}$ はすべて K_2 の開集合となる．これらの共通部分 U_P も開集合である．各点 $P \in K_2$ に対してこのような開集合を構成すると，K_2 もコンパクトなので，これらの有限個 $P_1, \ldots, P_m$ で K_2 は覆われる．このとき，$U_{P_j k}, k = 1, \ldots, n_{P_j}, j = 1, \ldots, m$ は明らかに $K_1 \times K_2$ を覆う．



さて，無限直積に戻り，$\prod_{\mu \in M} K_\mu$ がコンパクトとなるような添え字の部分集合 $M \subset \Lambda$ より成る集合 $\mathcal{M}$ を考えると，上に示したことから，有限部分集合はすべてこれに含まれるので，$\mathcal{M}$ は空ではない．更に，$\mathcal{M}$ の全順序部分集合 $\mathcal{N} = \{M_\nu, \nu \in N\}$ を考えると，これらの和集合 $M_\infty = \bigcup_{\nu \in N} M_\nu$ も $\mathcal{M}$ に属す．実際，$\nu_0 \in N$ を固定し，$\mathcal{U}$ を $\prod_{\mu \in M_\infty} K_\mu$ の任意の開被覆とするとき，これを射影写像で $\prod_{\mu \in M_{\nu_0}} K_\mu$ の被覆に落としたものは，仮定により元の被覆の有限個 $U_{\mu_1}, \dots, U_{\mu_s}$ の射影像で覆われる．直積集合の開集合は，有限個の添え字を除き K_μ 全体を直積成分として含むので，全部合わせても M_∞ の有限個の成分を除き，これらの U_{μ_i} が既に覆ってしまう．これら有限個の例外成分は，ある十分大きな M_ν にすべて含まれるので，$\mathcal{U}$ を対応する直積 $\prod_{\mu \in M_\nu} K_\mu$ に落としたものを射影像が覆うような $\mathcal{U}$ の元を更に追加すれば，これら全部を合わせた有限個の U_{μ_j} により $\prod_{\mu \in M_\infty} K_\mu$ は確かに覆われる．

以上によりこのような M の集合 $\mathcal{M}$ は包含関係を順序として空ならざる帰納的順序集合を成すので，Zorn の補題 (数理基礎論の無限集合論の章参照．これは選出公理と同等であった) により，極大元が存在する．それがもとの添え字集合 Λ と一致すれば証明は終わりである．もし，まだこの他に添え字の成分 λ が残っていたら，射影像が K_λ を覆うような有限個の元を更に $\mathcal{U}$ から持ってくれば，極大元に λ を追加できてしまうことになり不合理である．以上により，無限直積はコンパクトなことが示された．

逆に, Tihonov の定理から選出公理を導くには，直積 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ の各成分 X_λ が空ではないとして，これに，X_λ から有限個の点を除いたものを開集合として位相を定めると，コンパクトになる．(実際，X_λ に開集合の被覆 $\{U_\mu, \mu \in M\}$ があると, 最初の U_{μ_1} で覆えていない X_λ の点は有限個だけなので，容易に有限被覆に減らせる．実は更に簡単に，各 X_λ には密着位相を与えてもよいのだが，気持ちの悪い人も居るだろうから，それより少し増しな位相にした,) 今，一つの元 ω を選び，すべての X_λ に孤立点として追加する．$X_\lambda \cup \{\omega\}$ は相変わらずコンパクトであることが容易に確かめられる．よって Tihonov の定理により $\prod_{\lambda \in \Lambda}(X_\lambda \cup \{\omega\})$ はコンパクトとなる．この部分集合で，有限個の添え字に対して成分が X_μ, その他は 1 点 ω のみから成るような直積集合は，明らかに閉集合となり，かつ仮定により有限交差性を持つ．(有限個の直積空間においては，指定した成分を持つ直積の点の存在が自明だから.) よって，全部の共通部分が空でないが，それは元の直積空間に他ならない．　　QED

第 9 章　パラコンパクト性と可分性

可算性に関連した種々の概念をまとめて学ぶ．実用的な位相空間が普通に満たしている性質である．

§9.1　局所コンパクト，σ コンパクト，パラコンパクト

定義 9.1 位相空間 X が**局所コンパクト**とは，X の各点においてコンパクト集合よりなる近傍が少なくとも一つ存在することを言う．
位相空間 X が**σ コンパクト**とは，あるコンパクト集合の増大列 $K_1 \subset K_2 \subset \cdots K_n \subset \cdots$ により

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$$

となることを言う．(このような部分集合の増大列を X の取り尽くし増大列と呼ぶ.)

例 9.1 (1) $\boldsymbol{R}^n$ は局所コンパクトである．実際，$\forall P \in \boldsymbol{R}^n$ に対し，$\overline{B_\varepsilon(P)}$, $\varepsilon > 0$ はコンパクト集合より成る基本近傍系となる．

(2) $\boldsymbol{R}^n$ は σ コンパクトである．実際，

$$\boldsymbol{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{B_k(O)}, \qquad \overline{B_1(O)} \subset \overline{B_2(O)} \subset \cdots .$$

補題 9.1 局所コンパクトな Hausdorff 空間 X は正則である．また，X の各点はコンパクトな基本近傍系を持つ．

証明 まず X のコンパクト集合 K とその外の 1 点 P に対して分離性をいう．Hausdorff の仮定により，$\forall Q \in K$ に対し，Q の近傍 V_Q と P の近傍 U_Q で互いに交わらないものが存在する．K はこれらの V_Q の有限個で覆われるので，それらの和集合を O_1, これに対応する U_Q の共通部分を U とすれば，これらが K と P を分離する開集合対となる．

次に後半を証明する．P は仮定によりコンパクトな近傍 K を一つ持つ．これに含まれる任意の近傍 U に対し，$K \cap \complement U$ は K の閉部分集合なので，再びコンパクトとなり，かつ P を含まない．よって，既に証明したことより， $K \cap \complement U$ と P を分離する開集合 O_1, V が存在する．$\overline{V} \subset \complement O_1 \cap K \subset U$ であり，これは P のコンパクト近傍となる．

最後に，Z を X の任意の閉集合とし, $P \notin Z$ とする．まず，P のあるコンパクト近傍は Z と交わらないことを言う．コンパクト近傍は P の基本金傍系を成すので，もし，すべてのコンパクト近傍が Z と交わったら，P は Z の集積点となってしまい，従って Z が閉なことから $P \in Z$ となり不合理．そこで，P のコンパクト近傍 K が Z と交わらないとし，K の中に P の開近傍 V を取れば，$O = \complement K$ と V は Z と P を分離する開集合のペアとなる．　　QED

定義 9.2 X の部分集合の族 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}, \lambda \in \Lambda$, が**局所有限**とは，$\forall P \in X$ に対しそのある近傍 U が存在して U と交わるような $\mathcal{U}$ の元は高々有限個しか無いことを言う．

閉集合の無限個の和集合は一般には閉にならないが，次が成り立つ：

補題 9.2 $\{Z_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ を閉集合の局所有限な族とすれば，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$ も閉集合である．

証明 $Z = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} Z_\lambda$ の集積点 P が Z に属することを言えばよい．仮定により P のある近傍 U は有限個の $Z_{\lambda_j}, j = 1, 2, \ldots, s$ としか交わらない．これらの和集合 Z' は閉であることに注意．もし，U に含まれる任意の近傍 V が Z と P 以外の点を共有するなら，それは Z' との共通点でなければならない．よって，P は Z' の集積点となり，$P \in Z'$. 従って $P \in Z$.　　QED

定義 9.3 X の被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}, \lambda \in \Lambda$ に対し，X のもう一つの被覆 $\mathcal{V} = \{V_\mu\}, \mu \in M$ が $\mathcal{U}$ の**細分** (refinement) であるとは，$\forall V_\mu \in \mathcal{V}$ に対し $\exists U_\lambda \in \mathcal{U}$ が存在して $V_m u \subset U_\lambda$ となっていることを言う．この条件を満たす (一つとは限らない) 添え字集合の写像

$$\begin{array}{cccccc} \tau: & M & \longrightarrow & \Lambda & , & V_m u \subset U_{\tau(\mu)} \\ & \cup & & \cup & & \\ & \mu & \mapsto & \lambda = \tau(\mu) & & \end{array}$$

を，細分写像と呼ぶ．位相空間 X が**パラコンパクト**とは，X の任意の開被覆について局所有限な細分が存在することをいう．

定理 9.3 パラコンパクト Hausdorff 空間 X は正規である．

証明 Z_1, Z_2 を二つの交わらない X の閉集合とする．まず，任意の点 $P \in Z_1$ において，Z_2 と交わらないような閉近傍 A_P が見出せることを示す．Hausdorff を仮定したので，$\forall Q \in Z_2$ に対し，P の開近傍 U_Q と Q の開近傍 V_Q で，交わりを持たないものが存在する．V_Q は $\complement Z_1$ と共通部分

を取ることにより，Z_1 との交わりは無いものと仮定できる．さて，$\{V_Q, Q \in Z_2\}$ と $\complement Z_2$ を合わせたものは X の開被覆となるので，パラコンパクトの仮定により, 局所有限な細分が取れる．そのうち $\complement Z_2$ に含まれるもの以外のもの W_λ の和集合 O_2 は，明らかに Z_2 の近傍となり，かつ Z_1 と交わらない．P のある近傍 U は，細分被覆の有限個としか交わらないので，特に W_λ の有限個としか交わらない．それらを含むもとの近傍を $V_{Q_i}, i = 1, \dots, s$ とすると，$U' = U \cap U_{Q_1} \cap \dots \cap U_{Q_s}$ は P の近傍であって， W_λ と, 従って O_2 と交わらない．よって $\overline{U'} \subset \complement O_2$ は, Z_2 と交わらないような P の閉近傍となる．

今，Z_1 の各点においてこのような閉近傍 A_P を作る．$U_P = \mathrm{Int}(A_P)$ は P の開近傍なので，これらと $\complement Z_1$ とで X の開被覆ができる．パラコンパクトの仮定により，この局所有限な細分が存在するが，その $\complement Z_1$ に対応するもの以外の W_λ について，閉包を取ったもの A_λ は，やはり局所有限である (補題 9.1 の証明中で使ったのと同様の論法による)．すると，$A = \bigcup A_\lambda$ は補題 9.2 により閉となり，かつ Z_2 とは交わらないので，$O_1 = \bigcup_\lambda W_\lambda$ と $O_2 = \complement A$ は Z_1, Z_2 を分離する開集合のペアとなる．　　QED

定理 9.4 局所コンパクトな Hausdorff 空間 X では，σ コンパクトならパラコンパクトとなる．X の連結成分が可算個なら逆も成り立つ．

証明 X を局所コンパクトかつ σ コンパクトな位相空間とし，コンパクト集合の取り尽くし増大列 K_n を取る．任意に与えられた X の開被覆 $\mathcal{O}_\lambda, \lambda \in \Lambda$ について，各 K_n はこれらの有限個で覆えるが，そのまま n を動かしてしまうと，無限個交わるものが生じ得るので，縮めることを考える．そのため K_n を少し修正すると簡単である．K_1 はそのままとし，K_1 の各点のコンパクト近傍を選ぶと，K_1 はそれらの内部の有限個で覆えるので，対応するコンパクト近傍だけの和集合を取ったものは，再びコンパクトとなる．これにもともとの K_2 を合併したものを新しい K_2 とすると，$K_1 \subset \mathrm{Int}(K_2) \subset K_2$ とできる．以下，この操作を繰り返すと，

$$K_1 \subset \mathrm{Int}(K_2) \subset K_2 \subset \cdots \subset K_n \subset \mathrm{Int}(K_{n+1}) \subset K_{n+1} \subset \cdots$$

という列に作り替えることができる．そこで，帰納法により，K_{n-1} まではこれを覆う有限個の細分で，その各々が $\mathrm{Int}(K_n)$ に含まれるようなものが存在したとして，K_n を覆う有限個の被覆の元を取り，その各々と $\complement K_{n-1}$ (Hausdorff の仮定により開集合となる), 及び $\mathrm{Int}(K_{n+1})$ との共通部分を取ったものを新たに追加すれば，これらは全体として有限個で，かつ K_{n-2} までの被覆のために使われた開集合とは交わらない．よってこの操作を無限に続けても局所有限性は保たれる．

逆に，X は局所コンパクトかつパラコンパクトとし，簡単のためまず連結とする．X の各点においてコンパクトな近傍を選ぶ．これらの内部は X の開被覆なので，局所有限な細分 U_λ が存在する．この閉包を取ったものも明らかに局所有限である．実際，どの点 P においても，もしある近傍 U_P が $\overline{U_\lambda}$ と交われば，もとの U_λ の点を必ず含む．閉包は最初のコンパクト近傍のどれかに含まれているので，その閉部分集合としてコンパクトとなる．以上により，X の局所有限なコンパクト被覆が得られた．この被覆は局所有限なだけでなく，一つの元と交わる被覆の元が有限個という性質も持つことに注意せよ．これらからコンパクト終号による取り尽くし増大列を次のように構成する：

まず, どれか一つのコンパクト被覆の元を K_1 とする．次に，これと交わる有限個のすべてのコンパクト被覆の元を K_1 に合併したものを K_2 とする．以下同様にしてコンパクト集合の増大列 K_n を構成する．これが全空間を取り尽くすことを見よう．もし，この操作を続けた結果，$Z = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$ が全空間 X と一致しなかったら，補題 9.2 により，Z は X の閉集合となる．他方 $X \setminus Z$ も閉集合である．実際，この集合の集積点は，ある U_λ に含まれ，これは $X \setminus Z$ の点を含むが，$\overline{U_\lambda}$ が一つでも Z の点を含めば，Z の作り方から，$\overline{U_\lambda}$ 全体が Z に含まれてしまうから．よって X は連結でなかったことになり，不合理．

最後に，X が可算無限個の連結成分 $X_1, X_2, \ldots$ より成る場合は，各 X_i を取り尽くすコンパクト集合の増大列 $K_{i1}, K_{i2}, \ldots$ を構成した後，$K_k = \bigcup_{i+j\leq k} K_{ij}$ と置けば，$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ のコンパクト集合の取り尽くし増大列となる． QED

例 9.2 $\boldsymbol{R}^n$ はパラコンパクトである．これを直接示すには，上の定理の証明と同様の議論が必要．

連結成分が非可算個存在すると，上の定理の逆は成り立たない．実際，離散位相を持つ非可算集合は，もちろん Hausdorff であり，各点自身がコンパクトな近傍となるので，局所コンパクト．更に，任意の開被覆は，点より成る細分を持ち，これは局所有限なので，パラコンパクトでもある．しかし，コンパクト部分集合は有限個の点のみなので，可算集合でないと σ コンパクトでは有り得ない．

定理 9.5 距離空間はパラコンパクトである．

証明 この証明は僕が学生のときにも習わなかったので略．

§9.2 パラコンパクト空間と 1 の分解

定義 9.4 (1 の分解) 位相空間 X 上の関数の族 $f_\lambda, \lambda \in \Lambda$ が 1 の分解であるとは，次の条件が成り立つことをいう：

(1) $0 \leq f_\lambda(P) \leq 1$.

(2) $\forall P \in X$ に対し，P のある近傍 U が存在し，その上では $f\_\lambda(P) > 0$ となるものは有限個，かつ $\forall Q \in U$ に対し $\sum_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda(Q) = 1$ が成り立つ．

一般に，位相空間 X 上の関数 f に対し，その台を

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{P \in X\,;\, f(P) \neq 0\}} \quad (\text{閉包})$$

で定める．よって，

$$P \notin \operatorname{supp} f \quad \Longleftrightarrow \quad \exists U \ni P \ \ (\text{近傍}) \ \text{ s.t. } \ \forall Q \in U \ \ f(Q) = 0.$$

補題 9.6 正規空間 X に対しては，任意の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ に対し，開部分集合 $V_\lambda \subset U_\lambda$ で, $\overline{V_\lambda} \subset U_\lambda$ を満たすものを適当に取ると，$\mathcal{V} = \{V_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ も X の開被覆となるようにできる．

証明 開被覆の元 U_λ に着目し，$Z = \complement \bigcup_{\mu\neq\lambda} U_\mu$ と置けば，$Z_1 \subset U_\lambda$ となる．(さもなければ，U_λ を追加しても X 全体を覆えない.) よって Z_1 と $Z_2 = \complement U_\lambda$ は交わらない二つの閉集合となるので，正規の仮定により，開集合のペア O_1, O_2 で分離できる．このとき，U_λ を $\complement Z_2$ で置き換えたものは，X の被覆となる．$\overline{\complement Z_2} \subset \complement O_2 \subset U_\lambda$ なので，$V_\lambda = \complement Z_2$ とする．以下，被覆のすべての元についてこの操作を行えばよい．元が無限個存在する場合は，いつものように無限集合論の Zorn の補題を必要とするが，直感的にはこれで十分であろう． QED

定理 9.7 パラコンパクトな Hausdorff 空間には，勝手に与えられた開被覆 $\{U_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ に対して，$\operatorname{supp} f_\lambda$ が U_λ に含まれるような連続関数より成る 1 の分解が存在する．

証明 まず，与えられた開被覆を局所有限な細分で取り替える．(簡単のため同じ記号で表す.) 次に，定理 9.3 より X は正規なので，前補題を 2 度適用することにより閉集合 $A_\lambda \subset V_\lambda \subset U_\lambda$ が取れ，X の被覆となる．更に，正規性により $[0,1]$-値連続関数 g_λ で A_λ 上 1, $\complement V_\lambda$ 上 0 となるものが存在する．局所有限性により X の各点 P において, ある近傍を取れば，その上で $g_\lambda(P) > 0$ な

る λ は有限個しかないので，和 $g = \sum_\lambda g_\lambda$ が確定し, 到るところ正値となる．よって $f_\lambda = g_\lambda / g$ が求める関数となる．　QED

§9.3 コンパクト化

コンパクトな位相空間は取扱いが容易なので，一般の位相空間をコンパクトな空間の位相的部分集合として埋め込むことが手段としてよく使われる。これを一般にコンパクト化という．最も簡単なのは，一点だけを付け加えて行う**一点コンパクト化**である．

定理 9.8 σ コンパクトな位相空間は**一点コンパクト化**可能である．

実際，付け加えた無限遠点の近傍は，元の空間のコンパクト集合の補集合の全体と定めると，全体がコンパクトな位相空間となる．実際，まず，無限遠点の近傍系が，近傍系の公理を満たしていることは，コンパクト集合の基本的性質から容易に示せる．また，全体がコンパクトとなることは，開被覆が有ったら，そのうち無限遠点を覆うものの補集合は，もとの空間のコンパクト集合となるので，被覆の残りの元の有限個で覆えることから分かる．

例 9.3 (1) 直線 $\boldsymbol{R}$ の 1 点コンパクト化は，単位円周 $\{(x,y); x^2+y^2=1\}$ と同相である．
(2) $\boldsymbol{R}^2$ の 1 点コンパクト化は，2 次元球面 $\{(x,y,z); x^2+y^2+z^2=1\}$ と同相である．

位相空間 X が**完全正則**とは，T1 を満たし，かつ X の任意の閉集合 Z と点 $P \notin Z$ について，Z 上 0, P で 1 をとる X 上の $[0,1]$-値連続関数が存在することを言う．$f(x)$ が連続なら，$x \mapsto \min\{\max\{f(x),0\},1\}$ も連続函数となるので，$[0,1]$-値にはいつでも修正できる．明らかに，

$$\text{正規} \implies \text{完全正則} \implies \text{正則}.$$

定理 9.9 (Čech のコンパクト化) 完全正則な位相空間 X に対し，コンパクト Hausdorff 空間 Y で，次の諸条件を満たすものが (位相同型の意味で) 一意に定まる．
(1) $X \subset Y$ は誘導位相の意味で部分集合となっている．
(2) X は Y で稠密.
(3) X 上の任意の有界連続関数は Y 上の連続関数に拡張できる．

証明の概略 X 上の $[0,1]$ 値連続函数のすべてを $f_\lambda,\ \lambda \in \mathit{\Lambda}$ とする．写像

$$\begin{array}{cccc} \mathit{\Phi}: & X & \to & [0,1]^{\mathit{\Lambda}} \\ & \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ & P & \mapsto & (f_\lambda(P))_{\lambda\in\mathit{\Lambda}} \end{array}$$

が定まるが，完全正則の仮定により，任意の異なる 2 点 $P, Q \in X$ について，$f(P)=1,\ f(Q)=0$ なる $[0,1]$-値連続関数が存在するので，これらの $\mathit{\Phi}$ による行き先は異なる．従って $\mathit{\Phi}$ は一対一である．Tihonov の定理により $[0,1]^{\mathit{\Lambda}}$ は直積位相でコンパクトとなるが，その $\mathit{\Phi}(X)$ への誘導位相が，X のもとの位相と同型となることが確かめられる．$\widetilde{X} := \overline{\mathit{\Phi}(X)}$ が求めるコンパクト化となることが確かめられる．ここでは，X 上の任意の有界連続関数 f が $\widetilde{X}$ まで連続に拡張できることを示そう．それには，各 $f_\mu,\ \mu \in \mathit{\Lambda}$ が拡張できることを言えばよい．実際，任意の有界連続函数は，定数 c, C を適当にとるとき, $g = cf + C$ を $[0,1]$-値にでき, 従ってこれはある f_μ と一致するが，後者の拡張 $\widetilde{f_\mu}$ を用いると f の拡張 $\widetilde{f} = \dfrac{1}{c}(\widetilde{f_\mu} - C)$ が得られる．さて $\mathit{\Phi}(X)$ 上の函数 $F_\mu = f_\mu \circ \mathit{\Phi}^{-1}$ は，$\forall P \in X$ に対して，

$$f_\mu(P) = (F_\mu \circ \mathit{\Phi})(P) = F_\mu((f_\lambda(P))_{\lambda\in\mathit{\Lambda}})$$

により，$[0,1]^A$ からその第 μ 成分への射影写像 $\widetilde{F_\mu}$ と一致するので，明らかに連続函数として全体で定義されている．よってこれが求める拡張となる．　　QED

§9.4　可算公理

定義 9.5 位相空間 X が**第 1 可算公理**を満たすとは，X の任意の点の基本近傍系で，可算個の元より成るものが存在することを言う．

例 9.4 距離空間は第 1 可算公理を満たす．可算個の基本近傍の例としては，$B_{1/n}(P), n = 1, 2, \ldots$ が有る．

定義 9.6 位相空間 X が**第 2 可算公理**を満たすとは，X の開集合の基で可算個の元より成るものが存在することを言う．

近傍は開集合より成るので，明らかに，第 2 可算公理 $\Longrightarrow$ 第 1 可算公理.

位相空間 X が**可分** (separable) とは，X の可算部分集合で稠密なものが存在することを言う．

補題 9.10 第 2 可算公理 $\Longrightarrow$ 可分．距離空間では逆も成り立つ．

証明 X が第 2 可算公理を満たすとし，$\mathcal{O} = \{O_k, k = 1, 2, \ldots\}$ を開集合の基とする．このとき，各 O_k から 1 点 P_k を選べば，$\{P_k\}$ は X で稠密となる．実際，任意の点 $P \in X$ の任意の近傍 U に対し，$O_k \subset U$ なる元が存在するので，$P_k \in U$ となる．

逆に X は可分な距離空間とし，$P_k, k = 1, 2, \ldots$ は X で稠密とする．このとき，$\{B_{1/n}(P_k), k = 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots\}$ は X の開集合の可算基底となる．実際，O を X の任意の開集合とすれば，O はこれに含まれる $B_{1/n}(P_k)$ のすべての和集合と一致する．なぜなら，もし，O にこれらで覆われない点 P が残ると，P のある $\dfrac{1}{n}$-近傍は O に含まれるが，P の $\dfrac{1}{2n}$-近傍はある P_k を含み，従って P_k の $\dfrac{1}{2n}$-近傍は P を含み，かつ O に含まれることになり，矛盾．　　QED

位相空間 X が距離付け可能とは，X にある距離 d を定めると, d から定まる位相が，X の元の位相と同型となることを言う．

定理 9.11 (Urysohn の距離付け定理) 正規空間が第 2 可算公理を満たせば距離付け可能である．

証明 開集合の可算基 $\mathcal{O} = \{O_k, k = 1, 2, \ldots\}$ が与えられたとき，$\overline{O_k} \subset O_l$ なる各ペア $O_k, O_l \in \mathcal{O}$ について，O_k 上 1, $\complement O_l$ 上 0 なる $[0,1]$-値連続函数 f_{kl} が取れる．これらを適当に一列に並べて，$f_n, n = 1, 2, \ldots$ と番号を付け替え，写像

$$\begin{array}{cccc} \varPhi: & X & \to & [0,1]^{\boldsymbol{N}} \\ & \cup & & \cup \\ & P & \mapsto & (f_n(P))_{n=1}^{\infty} \end{array}$$

を定義する．正規空間では，異なる 2 点 P, Q に対して，$P \in O_l, Q \notin O_l$ なる元がまずとれ，次いで $P \in O_k \subset \overline{O_k} \subset O_l$ なる元 O_k がとれるので，f_{kl} の値がこれら 2 点を区別し，$\varPhi$ は一対一となる．その像が $[0,1]^{\boldsymbol{N}}$ からの誘導位相で X と位相同型になることも確かめられる．(議論の詳細は略す.) しかるに，$[0,1]^{\boldsymbol{N}}$ は,

$$\boldsymbol{x} = (x_n),\quad \boldsymbol{y} = (y_n) \quad \text{に対し} \qquad d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

を距離として，距離空間となることが容易に分かるので，その部分集合である $\varPhi(X)$，従って X は距離付け可能となる．　　QED

なお，例 7.3 により正規なことは距離付けの必要条件でもある．

第 10 章　一様位相と位相代数系

代数構造と位相構造をともに持ち，それらが両立しているような対象の概念．

定義 10.1 G が**位相群**であるとは，集合 G に 2 項演算 $\circ$ と位相構造 $\mathcal{T}$ が与えられており，$G, \circ$ は群となり，かつ群の演算 $\circ$ と逆元をとる演算はこの位相に関して連続であるようなもののことをいう．正確には，三つ組 $(G, \circ, \mathcal{T})$ のことを言うが，普通は単に G で表す．

例 10.1 位相群の例としては，加法群 $\boldsymbol{R}$, 乗法群 $\boldsymbol{R}^{\times}$, 乗法群 $\boldsymbol{S}^1 = \{e^{i\theta}; 0 \leq \theta < 2\pi\}$, 一般線型群 $GL(n, \boldsymbol{R})$, 特殊線型群 $SL(n, \boldsymbol{R})$, 直交群 $O(n)$ などがある．

同様に，位相環，位相体，位相ベクトル空間などが定義される．

これらは，平行移動で不変な近傍を持つので，距離が無くても異なる点での収束の速さが比較でき，一様連続とか，一様収束などの概念が意味を持つ．これらを代数構造から離れて一般化したものに，一様位相空間の概念がある．

第 11 章　収束概念の拡張

第 1 可算公理を満たさないような空間では，点列の収束だけでは位相を語ることができない．そこで点列の概念を一般化したものとして，有向点集合とか，フィルターという概念が導入された．更に，Cauchy フィルター，極大フィルターなどの概念を導入して，コンパクト性を点列コンパクトに倣って言い換えることなどが可能となる．

定義 11.1 添え字集合 Λ が**有向集合** (directed set) であるとは，$\forall\lambda, \mu \in \Lambda$ に対し，$\exists\nu \in \Lambda$ で，$\lambda \leq \nu$, $\mu \leq \nu$ となるものが存在することを言う．有向集合を添え字に持つ位相空間 X の点の族 $x_\lambda, \lambda \in \Lambda$ を**有向点集合**と呼ぶ．$x_\lambda, \lambda \in \Lambda$ が点 a に収束するとは，a の任意の近傍 U に対し，$\exists\lambda_U$ が存在して，$\lambda \geq \lambda_U$ なるすべての λ に対し，$x_\lambda \in U$ となることを言う．

補題 11.1 位相空間 X の部分集合 Z が閉集合 $\Longleftrightarrow$ Z の点より成る有向点集合 x_λ が a に収束するときは，収束先 a も必ず Z に含まれる．

補題 11.2 二つの位相空間の間の写像 $f: X \to Y$ が点 $a \in X$ で連続 $\Longleftrightarrow$ a に収束する X の任意の有向点集合 x_λ に対して $f(x_\lambda)$ は $f(a)$ に収束する．

有向点集合と同値な概念だが，フィルターを用いる人もいる．

定義 11.2 位相空間 X の部分集合の族 $\mathcal{F}$ が**フィルター**であるとは，次の性質を満たすことをいう．

(1) $A \in \mathcal{F}$ なら $A \neq \emptyset$.
(2) $A \in \mathcal{F}$, $A \subset B$ なら $B \in \mathcal{F}$.
(3) $A, B \in \mathcal{F}$ なら $A \cap B \in \mathcal{F}$.
点 a の近傍系 $\mathcal{U}_a$ が $\mathcal{U}_a \subset \mathcal{F}$ を満たすとき，フィルター $\mathcal{F}$ は点 a に収束するという．

フィルターの概念を用いても，位相的性質の言い換えができる．

補題 11.3 位相空間 X が Hausdorff $\Longleftrightarrow$ 任意の有向点集合，あるいはフィルターの収束先は高々 1 点に限る．