位相空間論　期末試験　テスト直し用

学籍番号	氏名	点数

問題 1. (i) $\boldsymbol{R}^2$ の次のような部分集合から，開集合と閉集合を選び出し，下の $\boxed{}$ 内に番号で答えよ．

(1) $\{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 > 1\}$　(2) $\{(x, y)\ ;\ x > 0, |y| < 2\}$　(3) $\{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 = 2\}$
(4) $\{(x, y)\ ;\ |x| + y^2 \leq 1\}$　(5) $\{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$　(6) $\{(x, y)\ ;\ x^2 \geq 1, y = x^2\}$
(7) $\{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$　(8) $\{(x, y)\ ;\ x^2 + y^2 < 1$ または $x^2 + y^2 \geq 2\}$

開集合：$\boxed{}$　閉集合：$\boxed{}$

(ii) 上で開集合でも閉集合でもなかったものについて，それぞれ閉包と開核 (内部) を示せ．

問題 2. $\boldsymbol{R}^2$ 上の 2 点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ に対して定義された次のような函数は距離となるか？ ならないものについては，距離の公理のどれが満たされないかを述べよ．いずれの場合も詳しい証明は不要である．

(1) $\mathrm{dis}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$

(2) $\mathrm{dis}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_2| + |x_2 - y_1|$

(3) $\mathrm{dis}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |x_1 - y_1| + \sqrt{|x_2 - y_2|}$

問題 3. 3 点より成る集合 $X = \{P, Q, R\}$ に，次のような部分集合が開集合の一部に含まれるような位相を入れたい：$\{P\}$, $\{P, Q\}$, $\{Q, R\}$.

(1) 位相空間の公理が満たされるようにするには，開集合としてこの他にどんなものが最低限必要か？

(2) 上に追加したものを合わせて開集合族としたときに得られる位相において，点 P, Q, R の近傍をそれぞれすべて記せ．

問題 4. 完備距離空間 (X, dis) の二つの部分集合 Z_1, Z_2 の間の距離を $\mathrm{dis}(Z_1, Z_2) := \inf_{P \in Z_1, Q \in Z_2} \mathrm{dis}(P, Q)$ で定める．(下線部の意味が分からない人は，以下 $X = \boldsymbol{R}^2$, dis をユークリッド距離としてよい.)
(1) 二つの閉集合 Z_1, Z_2 が $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ を満たしていても，$\mathrm{dis}(Z_1, Z_2) > 0$ とは限らないことを，$X = \boldsymbol{R}^2$ の場合に反例で示せ.

(2) Z_1 が 1 点で Z_2 が任意の閉集合のとき，$Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ ならば $\mathrm{dis}(Z_1, Z_2) > 0$ となることを示せ.

(3) Z_1 がコンパクト集合で Z_2 が任意の閉集合のとき，$Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$ ならば $\mathrm{dis}(Z_1, Z_2) > 0$ となることを示せ.

問題 5. 次の位相空間のペアは位相同型か否か？ 是の場合は位相同型写像を一つ与えよ．否の場合は簡単に理由を述べよ.
(1) 閉区間 $[0, 1] \subset \boldsymbol{R}$ と $\boldsymbol{R}$ 全体

(2) 半開区間 $(0, 1] \subset \boldsymbol{R}$ と $\overline{\boldsymbol{R}^+} = \{x \in \boldsymbol{R}\,;\, x \geq 0\}$.

(3) $\boldsymbol{R}$ の 1 点コンパクト化と円周 $\{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2\ ;\ x^2 + y^2 = 1\}$