数値計算期末試験　予想問題集

金子　晃

1　数値計算の基礎

問題 1.1 ビッグエンディアンとリトゥルエンディアンについて簡潔に説明せよ．

問題 1.2 リトゥルエンディアン仕様のインテル CPU のコンピュータで，
(a) 倍長整数 (long) 1025,
(b) 単精度浮動小数 (float) `-0.1000000`,
(c) 倍精度浮動小数 (double) `1.25000000000000`
が格納されたメモリーの内容の十六進ダンプの結果としてそれぞれ最もふさわしいものを次のうちから選べ．

(1) `CD CC CC 3D`　(2) `CD CC CC BD`　(3) `BD CC CC CD`
(4) `01 04 00 00`　(5) `00 00 10 25`　(6) `00 00 01 04`
(7) `00 00 25 10`　(8) `FF FB FF FF`　(9) `00 00 F4 3F`
(10) `00 00 00 00 00 00 F4 3F`
(11) `00 00 00 00 00 40 5F 40`

問題 1.3 リトゥルエンディアンのインテル CPU のコンピュータでメモリー内に存在した 4 バイトのデータ `CD CC 4C 3E` に該当するのは次のうちどれか？

(1) 文字列 `DCK>`　(3) 倍長整数 `12,3054,3299`
(2) 単精度浮動小数 `0.2`　(4) 倍長整数 `-12,3054,3297`

問題 1.4 オーバーフローとアンダーフローについて説明せよ．また計算機イプシロン (machine epsilon) とは何か？

問題 1.5 (1) 符号無し倍長整数 (unsigned long) で $n!$ を計算する関数のプログラムを C 言語で書け．
(2) このプログラムが正しい値を与える範囲を見積もれ.
[ヒント：Taylor 展開から得られる $\dfrac{n^n}{n!} \le e^n$ などを用いて $n!$ を見積もれ．計算機が使えない状況では限界の n を正確に出せなくてもよい．実は計算機を使っても 31 とか答えた人が沢山居たので，こういう練習も必要です.]

問題 1.6 単精度で $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ を頭から計算して行ったとき，和の値 S が変化しなくなる最小の N の値を N_0 とする．このとき，N_0 から 1 まで n を逆に動かして上の和を計算したものの値は，S より大きいか，それとも小さいか，それとも同じか？ 理由とともに答えよ．

問題 1.7 次のようなデータの計算機内部での値を十六進数で表現せよ．

(1) 倍長整数 (long,32 ビット) 2011
(2) 倍長整数 (long,32 ビット) -2011
(3) 単精度浮動小数 4.0
(4) 倍精度浮動小数 2.0
(5) 文字列 `"I love Ochanomizu."`
[ヒント：ピリオドのアスキーコード `0x2E` は試験時にも与える．半角空白のコードとアルファベットの大文字小文字の開始コードくらいは記憶せよ.]

問題 1.8 C 言語で long 宣言された整数変数 x が表現できる正の最大値は，$2^{31}-1 = 21,4748,3647$ である．今，x にこの値が格納されているとして，その後に

```
x++;
printf("%ld\n",x);
```

という指令を実行したら，何が出力されるか？

2 無限級数の取扱い

問題 2.1 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ の和の近似値を求める次の C プログラムの誤りを指摘し，正しく直せ.

```
int main(void){
  int i,n=1000;
  double s=(double)0;
  for (i=1;i<=n;i++){
    s=s+1/i^2;
  }
  printf("%ld\n",s);
  return 0;
}
```

問題 2.2 無限級数の近似和を計算するときに考慮しなければならない誤差にはどのようなものがあるか?

問題 2.3 問題 2.1 のプログラムを正しく直して実行したとき，

(1) 級数の近似値としてどのくらいの精度の値が求まるか？

(2) n の値を大きくしたとき，どのあたりまでは近似値が真の値に近づくと期待されるか？

(3) その限界を越えてより良い近似値を求めるための工夫を一つ記せ.

問題 2.4 級数 $\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{i^2}$ において，$N=10^n$ とし，n を種々の値に取って実験すると，$\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}$ の真値 $-\dfrac{1}{N}$ と $O\big(\dfrac{1}{N^2}\big)$ でしか違わないこと，i.e. 近似値は小数点以下第 n 桁目が狂っているが，そこに 1 を足せば，ほぼ $2n$ 桁の近似値が得られることが num2-1.c などで観察される．この理由を数学で説明せよ．

問題 2.5 (1) $\log(1+x)$ の Taylor 展開を計算するプログラムを C 言語で書け．ただし，引数 x をとり，計算値を返す関数の部分だけでよい.

(2) この級数は $x=1$ でも収束し $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-+\cdots+(-1)^{N-1}\dfrac{1}{N}+\cdots=\log 2$ が成り立つことを，$\dfrac{1}{1+x}$ の積分を用いて示せ.

(3) 定積分の理論を思い出して (あるいは高校生的技法により) 左辺の打ち切り誤差は $\Theta\big(\dfrac{1}{N}\big)$ であることを示せ．ここに，$f(n)=\Theta\,(g(n))$ は，適当な正定数 $c_1, c_2>0$ により $c_1 g(n)\le f(x)\le c_2 g(n)$ が成り立つことをいう．

(4) 最終項の分母の N を $2N$ に変えると，誤差が $O\big(\dfrac{1}{N^2}\big)$ に改良されることが実験で確かめられる．この理由を数学で説明せよ．

3　数値微分

問題 3.1 関数 $f(x)$ は4 回連続的微分可能とする．メッシュ h に対して $f'(a)$ の近似値を与える前進差分，後退差分，中心差分の公式を記し，それぞれの近似のオーダーを与えよ．

問題 3.2 関数 $f(x)$ は2 回微分可能だが3 回は微分可能でないとき，中心差分が必ずしも前進差分より良い近似度 $O(h^2)$ を与えるとは限らないことを例を挙げて説明せよ．

問題 3.3 $f'(x)$ の値を，$f(x)$, $f(x+h)$, $f(x+2h)$ を用いて $O(h^2)$ で近似する差分公式を与えよ．(このような公式は領域の境界で必要となる．)

問題 3.4 $f(x) = \mathrm{Arcsin}\, x$ に対して, 1 階および2 階の導函数を中心差分の公式を用いて計算する C または FORTRAN のプログラムを書け．またこれらのプログラムがどの程度の近似値を与える実力があるかを述べよ．

[ヒント: $\mathrm{Arcsin}\, x$ は C 言語では `asin(x)`, FORTRAN では `ASIN(X)` (単精度) あるいは `DASIN(X)` (倍精度) で呼び出せる.]

問題 3.5 不等間隔の格子点 a_1, a_2, a_3 を用いて，$f'(a_2)$ の値を $h = a_3 - a_1$ について2 次の精度で求める差分公式を探せ.

[ヒント：2010 年度の金子研卒研 (空間曲線の曲率を用いたオンライン筆跡鑑定の研究) を参照.]

問題 3.6 2 階の導函数に対する4 次の近似公式を探せ．この公式は，h をどの程度まで小さくしても安全か？

[ヒント：$a\{f(x+2h)+f(x-2h)\}+b\{f(x+h)+f(x-h)\}+cf(x)$ の形で Taylor 展開から未定係数法により求めよ.]

問題 3.7 3 階微分 $f'''(x)$ に対する差分近似式を一つ与え, その公式誤差を示せ. また, $f(x) = \sin x$ に対して $x = 1$ でそれを適用するときには, メッシュサイズ h をどれくらいに取るのが最も効率的か？

4　数値積分

問題 4.1 関数 $f(x)$ の定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ の近似値を求めるための数値積分公式である，Riemann 近似和，台形公式，Simpson 公式についてそれぞれ説明し，$f(x)$ が必要なだけなめらかなときのメッシュ h に対する近似のオーダーを (証明無しで) 示せ.

問題 4.2 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x dx$ の近似値を，区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ の2 等分割に対して上記三種の数値積分公式により計算した結果を有効数字4 桁で与えよ．($\sqrt{2}$ の値くらいは覚えているよね？)

問題 4.3 (1) 積分公式

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{N-1} hf(a+ih+h/2)$$

の意味を説明し, 誤差のオーダーを答えなさい．ただし f は必要なだけ微分可能とする.

(2) 台形公式と比較したこの公式の実用的な優劣を述べよ.[ヒント：まず図を描いてどんな値を計算しているかを見, オーダーを推測せよ.]

問題 4.4 $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-x^4} dx$ を数値計算する方法を述べ，実際に C または FORTRAN でプログラムを書け.

問題 4.5 $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} dx$ は収束が遅く，無理数かどうかもまだ分かっていない．この近似値を有効数字2 桁程度計算する工夫について述べよ.

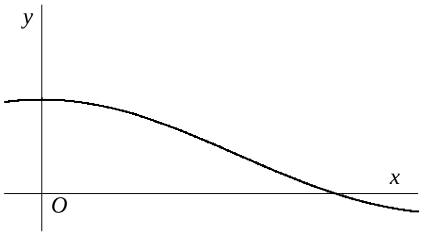
5　非線形方程式の解法

課題 5.1 2 分法と Newton 法，および線型反復法の原理を説明し，それぞれの長所，短所を述べよ．

問題 5.2 (1) 超越方程式 $e^x = 2x+1$ は $x=0$ 以外に解を持つことを示せ.

(2) 上記の解を計算機で近似計算する方法を二つ示せ.

問題 5.3 関数 $y = \dfrac{\sin x}{x}$ は $0 \le x \le \pi$ で単調減少し，区間 $[0,1]$ の値を1 度ずつ取る (下図参照)．定義域を区間 $[0,1]$ とするこの関数の逆関数を実装する方法を示せ．(プログラムまで書く必要は無い.)



問題 5.4 上の逆関数を普通に実装すると，$x=1$ の近くで有効桁数が半分程度に落ちてしまう．この理由を説明し，対策法を述べよ．

問題 5.5 中心差分による1 階微分の近似式を Richardson 加速する方法を説明せよ．

問題 5.6 函数 $y=f(x)$ は2 重零点を持つとする．i.e.

$$f(a) = f'(a) = 0, \quad f''(a) \neq 0.$$

このとき a を求めるための Newton 法の収束の速さを調べよ．

問題 5.7 Newton 法を用いて $x^2=3$ を解くとき，初期値を $x_0=1$ として x_3 までの値を示せ. ただし数値は分数のままで答えよ．

6　行列の計算 (1)

問題 6.1 連立1 次方程式をガウスの消去法で解くとき，ピボット選択を行うのはなぜか？キーワード「桁落ち」を用いて説明せよ．

問題 6.2 ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を N 回反復して施した結果を求めるプログラムを次のように書いた．問題点を指摘し訂正せよ．

```
for (i=0;i<N;i++){
  x=a*x+b*y;
  y=c*x+d*y;
}
```

課題 6.3 2 次元配列をコピーするプログラムを C 言語により2 重ループを用いて次のように書いた．

```
for (i=0;i<N;i++){
  for (j=0;j<N;j++){
    b[i][j]=a[i][j];
  }
}
```

(1) この書き方は正しいか？ それとも添え字の順を交換した方が速くなるか？

(2) これに対応するプログラムを FORTRAN 77 で書け．ただし高速になる順番にループを選択せよ．

問題 6.4 N 次正方行列を係数行列とする連立1 次方程式をガウスの消去法で解くとき，必要とされる計算量を乗除算の回数で見積もれ．また，巨大なサイズの連立1 次方程式の近似解を求めるのに使われる，ガウスの消去法よりも効率的な方法を述べよ．

7　行列の計算 (2)

問題 7.1 $\boldsymbol{R}^N$ のベクトルの上限ノルムを

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty := \max_{1\le i\le N} |x_i|$$

で定めるとき，ノルムの性質

(1) $\|\boldsymbol{x}\|_\infty \ge 0$, また $\|\boldsymbol{x}\|_\infty = 0 \Longleftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$
(2) $\|\boldsymbol{\lambda x}\|_\infty = |\lambda|\|\boldsymbol{x}\|_\infty$
(3) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_\infty \le \|\boldsymbol{x}\|_\infty + \|\boldsymbol{y}\|_\infty$

を満たすことを示せ.

問題 7.2 N 次正方行列 $A = (a_{ij})$ において,

$$a_{ii} > \sum_{1\le j\le N, j\ne i} |a_{ij}|$$

が各 $i = 1, \dots, N$ について成り立つものを対角優位行列と呼ぶ．対角優位行列に対して Jacobi 法が収束することを次の順で示せ.

(1) $A = D + B$ と対角・非対角部分の和に分けるとき，行列の作用素ノルム $\|D^{-1}B\|_\infty < 1$ となる．ここに,

$$\|A\|_\infty := \sup_{\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty}$$

は，上限ノルムに関する A の作用素ノルムを表す.

(2) 縮小写像の定理を適当な写像に適用せよ.

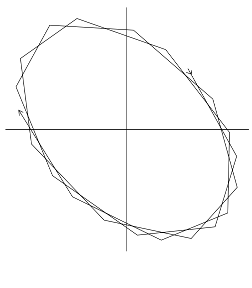
8　常微分方程式

問題 8.1 単振動の方程式を1 階連立化した

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y) = y, \qquad \frac{dy}{dt} = g(x,y) = -x$$

に対し, エネルギー保存則 $x^2 + y^2 = \text{const.}$ を示せ. (解の具体的な函数形を用いず, 微分方程式から導け.)

課題 8.2 単振動の方程式を1 階連立化した上記の方程式に，ダミー変数を使い忘れた誤った実装をした場合には，かなり大きい h についても，軌道が無限に発散しないという現象を数学的に正当化せよ．また正しい Euler-Cauchy 法では, この量は時間ステップとともにどう変化するか述べよ.
［ヒント：第 n ステップの近似解 (x_n, y_n) に対し, 量 $x_n^2 + hx_ny_n + y_n^2$ が n によらず一定となることを計算で示せ. ］



初期値 $(2,2)$, $h = 0.8$, ステップ数 20 回

課題 8.3 振幅の大きな振り子の運動方程式は，$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k\sin x$ となり，初等関数では解くことができない．この近似解を求める方法を述べよ．(初期条件としては，振り子を振れ角 $30°$ の位置で静かに離した場合を仮定せよ．実際に動くプログラムまで書くには及ばない．)

問題 8.4 常微分方程式の境界値問題

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + q(x)u = f(x) \quad (0 < x < 1), \qquad u(0) = u(1) = 0$$

を離散化して解くとき，どのような計算が必要となるか述べよ．ただし，q, f は既知の関数とする．

問題 8.5 Runge-Kutta 法について述べよ．また，これを最も簡単な微分方程式 $y' = f(x)$ に適用すると，$f(x)$ に対するどんな積分公式となるか？

問題 8.6 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = y$ の初期条件 $y(0) = 1$ を満たす解の $x = 1$ における近似値を, メッシュ幅 $h = 1.0$ について Runge-Kutta 法で計算した値 (すなわち，Runge-Kutta 法の1 段だけの計算値) を示せ.

問題 8.7 常微分方程式の境界値問題

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 0, \qquad (0 < x < 1), \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1 \end{cases}$$

を考える.

(1) この問題の厳密解 (解析解) を求めよ.

(2) 領域 $[0, 1]$ を 4 等分し, 一次および二次の微分にいずれも 2 次精度の差分近似を適用したときの近似解の値 $y(0.25)$, $y(0.5)$, $y(0.75)$ を求めよ.

9 複素数の取り扱い

問題 9.1 C 言語で複素数の計算を行う方法を一つ説明せよ．ただし，gcc の complex ライブラリのようなものは用いないものとする．

問題 9.2 次はマンデルブロート集合を描画する FORTRAN プログラムの一部である．これを C 言語に翻訳せよ．ただし，GX(), GY() はスクリーンのピクセル座標をワールド座標 $-2 \le x \le 2$, $-1.5 \le y \le 1.5$ に変換する線形関数であり，PSET() はピクセル (I,J) を着色するサブルーチンである．これらは C 言語に翻訳後もそのまま用いてよいものとする．

```
      COMPLEX C,Z
      ...
      DO 200 I=0,800
         DO 100 J=0,600
            C=CMPLX(GX(I),GY(J))
            Z=(0,0)
            DO 50 K=1,80
               Z=Z**2+C
               IF (CABS(Z).GT.2.0) GO TO 100
   50       CONTINUE
            CALL PSET(I,J,15)
  100    CONTINUE
  200 CONTINUE
```

問題 9.3 $z^3 - 1 = 0$ の根で, 単位円周上 1 のすぐ次に現れるもの (1 の原始 3 乗根 ω) の近似値を複素 Newton 法で計算するとき, 初期値 i から出発して 2 回反復したときの値を求めよ.

10　偏微分方程式の初期値問題

問題 10.1 空間1 次元熱方程式の初期値-境界値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,x) = \varphi(x), \quad u(t,-1) = 0, \quad u(t,1) = 0$$

を考える．ただし，

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < -0.5, \\ 2x+1, & -0.5 \le x < 0, \\ -2x+1, & 0 \le x < 0.5, \\ 0, & 0.5 \le x \le 1 \end{cases}$$

とする．

(1) 少し時間が経ったときの解のグラフはどんな形になるか？

(2) 沢山時間が経ったときの解のグラフはどんな形になるか？

問題 10.2 上の問題を差分法で解く手順を記せ．更に，区間 $[-1,1]$ の分割を 4 等分として，それに対して最も普通に選んだ時間ステップを2 だけ進めたときの解を記せ.

問題 10.3 空間2 次元の波動方程式の正方形 $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ 上での斉次 Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & (t > 0, 0 < x < 1, 0 < y < 1), \\ u(t,x,0) = 0, \quad u(t,x,1) = 0, & (t > 0, 0 < x < 1), \\ u(t,0,y) = 0, \quad u(t,1,y) = 0, & (t > 0, 0 < y < 1), \\ u(0,x,y) = \varphi(x,y), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x,y) = \psi(x,y), & (0 < x < 1, 0 < y < 1) \end{cases}$$

の中心差分による近似の安定性を調べる．

(1) 初期値を $\varphi(x,y) = \sin \pi x \sin \pi y$, $\psi(x,y) = 0$ に取ったときの差分方程式の解を求めよ．

(2) 上の解から，安定性のために k/h が満たすべき不等式を推定せよ．

11　偏微分方程式の境界値問題

問題 11.1 正方形 $[0,1] \times [0,1] \subset \boldsymbol{R}^2$ 上で，Poisson 方程式 $-\Delta u = 1$ を斉次 Dirichlet 境界条件付きで考えたものを Fourier 級数を用いて解いたときの，最初の1 項を求めよ．

問題 11.2 正方形 $[0,1] \times [0,1] \subset \boldsymbol{R}^2$ を各座標について2 等分したメッシュについて，Poisson 方程式 $-\Delta u = 1$ を斉次 Dirichlet 境界条件付きで2 階中心差分を用いた差分法により解いたときの中央の節点での解の値を示せ.

課題 11.3 正方形 $[0,1] \times [0,1] \subset \boldsymbol{R}^2$ を各座標について N 等分したメッシュについて，斉次 Dirichlet 境界条件付き Poisson 方程式 $-\Delta u = 1$ を2 階中心差分を用いた差分法により解くとき，どのような連立1 次方程式を解くことになるか？ 係数行列と右辺のベクトルの形を述べよ．

12　多倍長演算・精度保証計算

問題 12.1 自然対数の底 e の値を C または FORTRAN を用いて小数点以下 100 桁計算する手順を示せ.

問題 12.2 $e^x = x$ を満たす実数は存在しないことを数値計算で証明できるか？