

数値計算講義 第7回

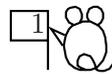
行列の計算 (2) – 反復法と固有値の計算 –



カーネンコ アレクセイ
金子 晃

kanenko@mbk.nifty.com
alexei.kanenko@docomo.ne.jp
<http://www.kanenko.com/>

対角優位行列の反復法による解法 num7-1.f, num7-1b.f



正方行列を係数行列とする連立1次方程式 $AX = F$ において,

$$A = D + B, \quad D \text{ は対角型で } B \text{ は } D \text{ に比して小さい,}$$

とするとき, 方程式を $DX = F - BX$ と変形し,

X_0 : 適当に選ぶ

$$DX_{n+1} = F - BX_n, \quad \text{i.e.} \quad X_{n+1} = D^{-1}F - D^{-1}BX_n$$

という反復法で求めることができる. これを **Jacobi 法** と呼ぶ.

$D^{-1}F$, $D^{-1}B$ は計算しておけるので, 結局, \mathbf{R}^N のアフィン写像

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = F(\mathbf{x}) := A\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

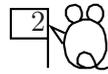
の反復の挙動を調べることに帰着する.

これをプログラミングすると (num7-1.f),

```
DO 100 I=1,N
  Y(I)=B(I)
  DO 100 J=1,N
    Y(I)=Y(I)+A(I,J)*X(J)
100 CONTINUE
DO 200 I=1,N
  X(I)=Y(I)
200 CONTINUE
```

【参考】 num7-1b.f は行列を帯状構造で格納することにより,
大きなサイズまで扱えるようにしたもの. 次ページの num7-2b.f も同様.

反復法その2



これでは配列 Y(N) のメモリーが無駄なので、一つで済ますと、

```
DO 200 I=1,N
  Y=B(I)
  DO 100 J=1,N
    Y=Y+A(I,J)*X(J)
100  CONTINUE
  X(I)=Y
200 CONTINUE
```

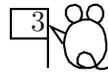
これは、前ページのプログラムと同じか？

違う！
ベクトル X の第 I+1 成分の更新を計算するのに、このプログラムでは、
X(1), X(2), ..., X(I) の更新後の値が使われてしまっている！
しかし、不思議なことに、多くの場合収束がかえってよくなる。
これを **Gauss-Seidel 法** と呼ぶ (num7-2.f,num7-2b.f,).

もとの問題でいうと、 $AX = F$ を $A = D + B = D + L + R$ と変形したとき、
Jacobi 法は $X_{n+1} = D^{-1}(F - (L + R)X_n)$ なのに対し、
Gauss-Seidel 法は $X_{n+1} = D^{-1}(F - LX_{n+1} - RX_n)$ 、
従って、 $X_{n+1} = (I + D^{-1}L)^{-1}D^{-1}(F - RX_n)$ (I は単位行列)
 $= (D + L)^{-1}F - (D + L)^{-1}RX_n$

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ b_{21} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_{N-1,N} \\ b_{N1} & \cdots & b_{N,N-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$$

縮小写像の原理 (反復法の収束の正当化)



$F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ が縮小写像とは,

$$\exists \lambda < 1 \text{ s.t. } \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ に対し, } \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| \leq \lambda \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

このとき, F の不動点, i.e. $F(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ なる \mathbf{a} がただ一つ存在する.

それは, 任意の初期値 \mathbf{x}_0 から始め, F を反復適用して得られる点列 $\mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n)$ の極限点として求まる.

証明 $\mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n)$ と $\mathbf{x}_n = F(\mathbf{x}_{n-1})$ との差をとると

$$\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n = F(\mathbf{x}_n) - F(\mathbf{x}_{n-1})$$

よって仮定により

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n\| \leq \lambda \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_{n-1}\| \leq \cdots \leq \lambda^n \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0\|.$$

ゆえに $\{\mathbf{x}_n\}$ は Cauchy 列となり, 収束する.

(級数 $\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_0 + \sum_{k=1}^n (\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1})$ が収束すると言ってもよい.)

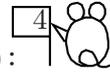
$\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{a}$ とすると, F は連続なので, $\mathbf{x}_{n+1} = F(\mathbf{x}_n)$ から極限に行って $F(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$. すなわち, \mathbf{a} は F の不動点となる.

もし \mathbf{b} も不動点だったとすると, $F(\mathbf{b}) = \mathbf{b}$ との差を取って

$$\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = \|F(\mathbf{b}) - F(\mathbf{a})\| \leq \lambda \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| \quad \therefore \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = 0$$

行列のノルム

A の作用素ノルム (線型写像 A によるベクトルの伸び率の最大値):



$$\|A\| := \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}, \quad \text{従って特に } \|A\mathbf{x}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x}\|.$$

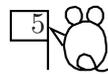
作用素ノルムの性質:

- (1) $\|A\| \geq 0$ であり, 更に $\|A\| = 0 \iff A = O$.
 $\because A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for $\forall \mathbf{x} \iff A = O$ より.
- (2) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$
 $\because \|(A + B)\mathbf{x}\| = \|A\mathbf{x} + B\mathbf{x}\| \leq \|A\mathbf{x}\| + \|B\mathbf{x}\|$ より.
- (3) $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$.
 $\because \|\lambda A\mathbf{x}\| = |\lambda| \|A\mathbf{x}\|$ より.
- (4) $\|I\| = 1$
- (5) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$
 $\because \|AB\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|B\mathbf{x}\| \leq \|A\| \|B\| \|\mathbf{x}\|$ より.

一般化: 次の量も上の諸性質を満たし, 全く同様に使える.

$$\|A\|_S := \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|S^{-1}A S \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

行列の作用素ノルムと固有値



$\|A\| < 1$ なら, (より一般に $\|A\|_S < 1$ なら),

写像 $\mathbf{x} \mapsto F(\mathbf{x}) := A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ は縮小写像となる.

$\because \|F(\mathbf{x}) - F(\mathbf{y})\| = \|A\mathbf{x} - A\mathbf{y}\| \leq \|A\|\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ より.

($\|A\|_S$ のときは \mathbf{R}^n の距離を $\|\mathbf{x}\|_S := \|S^{-1}\mathbf{x}\|$ に取ると縮小写像となる.)

このとき, 近似列は $A\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{x}$, i.e.

$(I - A)\mathbf{x} = \mathbf{b}$ の唯一解 $(I - A)^{-1}\mathbf{b}$ に収束する. ($\mathbf{b} = \mathbf{0}$ なら $\mathbf{0}$ に収束.)

いつ行列 A の作用素ノルムが 1 より小さくなるか?

A の固有値の絶対値がすべて < 1 のとき, かつそのときに限り, ある S について $\|A\|_S < 1$ となる.

復習: 行列の固有値

$\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ について $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ となるとき,

λ を A の固有値, \mathbf{x} を対応 (同伴) する固有ベクトルという.

● 思想: 一般に, 線型写像 A の作用は複雑だが, 固有ベクトルの方向へは, 単なる相似拡大として働く. そのときの拡大率が固有値 (負なら向きも変える)

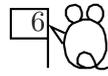
必要性の証明 $|\lambda| \geq 1$ なる固有値があると, 対応する固有ベクトルを \mathbf{x} とすれば, S が何であれ, $\mathbf{y} = S^{-1}\mathbf{x}$ に対し

$$\frac{\|S^{-1}AS\mathbf{y}\|}{\|\mathbf{y}\|} = \frac{\|S^{-1}A\mathbf{x}\|}{\|S^{-1}\mathbf{x}\|} = \frac{\|S^{-1}\lambda\mathbf{x}\|}{\|S^{-1}\mathbf{x}\|} = |\lambda|$$

よって $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ につき \sup をとって $\|A\|_S \geq |\lambda|$

逆の方は A を標準形に帰着して証明する.

行列の標準形



● 固有ベクトルで空間の基底が作れれば、行列は対角化できる：

$A\mathbf{x}_j = \lambda_j\mathbf{x}_j, j = 1, 2, \dots, N$ なら、

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) &= (\lambda_1\mathbf{x}_1, \lambda_2\mathbf{x}_2, \dots, \lambda_N\mathbf{x}_N) \\ &= (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって、 $S = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N)$ が正則なら、

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}$$

● 固有値 λ_j は複素数になり得る。

● いつでも固有ベクトルで基底が作れる訳ではない。

● 固有値1 個につき、少なくとも一つは固有ベクトルが取れる (定義より！)

異なる固有値に対応する固有ベクトルたちは一次独立。

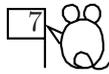
従って、固有値がすべて単純なら、対角化可能。

● 重複固有値が有っても、一次独立な固有ベクトルが

固有値の重複度に等しい個数だけ取れれば、対角化可能

● 一般固有ベクトル ($\exists k > 1 ((\lambda - A)^k \mathbf{x} = 0)$) が必要となれば

⇒ Jordan の標準形を使うしかない。



- 対称行列 ${}^tA = A$ の場合は、最も簡単で、応用上も重要。
 - 対称行列の固有値は常に実数
 - 対称行列の異なる固有値に対応する固有ベクトルは直交する。
 - 対称行列の重複固有値に対しては、常に重複度に等しい個数の1次独立な固有ベクトルが取れる。
- ⇒ 対称行列は直交行列で対角化できる

Q P が直交行列 $\iff P$ の列ベクトルは正規直交基底
 $\iff {}^tPP = I \iff (P\mathbf{x}, P\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$
 $\iff P$ はベクトルの長さを変えない

対称行列のときの十分性の証明 A は直交行列 P で対角化される：

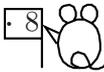
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_N \end{pmatrix}, \lambda_j \text{ は } A \text{ の固有値.}$$

対角型行列の作用素ノルムは明らかに $\max_{1 \leq j \leq N} |\lambda_j|$

他方、直交行列はベクトルの長さを変えないので、

$$\|P^{-1}AP\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|P^{-1}AP\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|AP\mathbf{x}\|}{\|P\mathbf{x}\|} = \|A\|$$

よって $\|A\| = \max_{1 \leq j \leq N} |\lambda_j|$. 特に、 $\|A\| < 1 \iff \max_{1 \leq j \leq N} |\lambda_j| < 1$

参考 一般の場合、 A を Jordan 標準形にする変換行列を S とする  一般に Jordan 標準形 $S^{-1}AS$ は

$$\begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & J_t \end{pmatrix}, \quad \text{各 } J_j \text{ はある } \lambda \text{ について } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ の形}$$

だが、 S を変更して、肩の 1 をいくらでも小さな正の数 ε に替えられる。
(標準形への変換の仕方を学ばなかった人は、これを信ずるか、肩の 1 が現れない対角化可能な場合だけを考えよ。)

そこで $\varepsilon > 0$ を $\max_{1 \leq j \leq N} |\lambda_j| < \sqrt{\frac{1-\varepsilon-\varepsilon^2}{1+\varepsilon}}$ となるように選び、

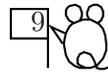
このときの変換行列 S でノルム $\|A\|_S$ を定めれば、

$$\begin{aligned} \|A\|_S &:= \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|S^{-1}AS\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \\ &= \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \sqrt{(\lambda_1 x_1 + \varepsilon x_2)^2 + (\lambda_2 x_2 + \varepsilon x_3)^2 \cdots + (\lambda_N x_N)^2} \end{aligned}$$

ここで一般に $(a + \varepsilon b)^2 \leq (1 + \varepsilon)a^2 + \varepsilon(1 + \varepsilon)b^2$ なので、

$$\begin{aligned} \|A\|_S &\leq \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \sqrt{(1 + \varepsilon)\lambda_1^2 x_1^2 + \varepsilon(1 + \varepsilon)x_2^2 + \cdots + (1 + \varepsilon)\lambda_N^2 x_N^2} \\ &\leq \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \sqrt{(1 + \varepsilon)\left(\max_{1 \leq j \leq N} |\lambda_j|\right)^2 \|\mathbf{x}\|^2 + \varepsilon(1 + \varepsilon)\|\mathbf{x}\|^2} \\ &\leq \sqrt{1 + \varepsilon} \sqrt{\left(\max_{1 \leq j \leq N} |\lambda_j|\right)^2 + \varepsilon} < 1 \end{aligned}$$

Sturm-Liouville 型固有値問題



$$-v''(x) + q(x)v(x) = \lambda v(x), \quad v(a) = v(b) = 0$$

あるいは、更に、

$$-v''(x) + q(x)v(x) = \lambda m(x)v(x), \quad v(a) = v(b) = 0$$

などを考える。

離散化すると、 $h = (b-a)/N$, $x_j = a + jh$, $v_j = v(x_j)$ として、

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + q_1 & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q_2 & -\frac{1}{h^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q_{N-2} & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q_{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N-2} \\ v_{N-1} \end{pmatrix}$$

最も簡単な $q(x) = 0$, $[a, b] = [0, 1]$ のとき、

手計算では、 $-v'' = \lambda v$ の一般解 $v = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda}x)$ に境界条件を代入して λ と c_1, c_2 の比を決めればよい。

$x = 0$ において $c_2 = 0$,

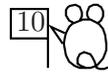
$x = 1$ において $c_1 \sin(\sqrt{\lambda}) = 0$. $\therefore \sqrt{\lambda} = n\pi$.

よって解析解は $v(x) = \sin n\pi x$, $\lambda = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \dots$

一般の定常波はこれらの重畳 (1 次結合) で表される (Fourier 級数の理論)

数値計算でこれを確かめよう!

固有値と固有ベクトルの計算



線型代数では、まず固有多項式 $\det(\lambda I - A)$ を計算し、その根として固有値を求める。
行列が巨大になるとこの方法は非常にまずい。

- 固有多項式の計算は大変。
- せっかく多項式が求まっても、その根の計算は誤差に非常に敏感で数値計算に向かない。

有名な例: **Wilkinson** 多項式

$$f(x) = (x - 1)(x - 2) \cdots (x - 20),$$

$$g(x) = f(x) - \epsilon x^{19}, \quad \epsilon = 2^{-23} \doteq 1.192 \times 10^{-7}$$

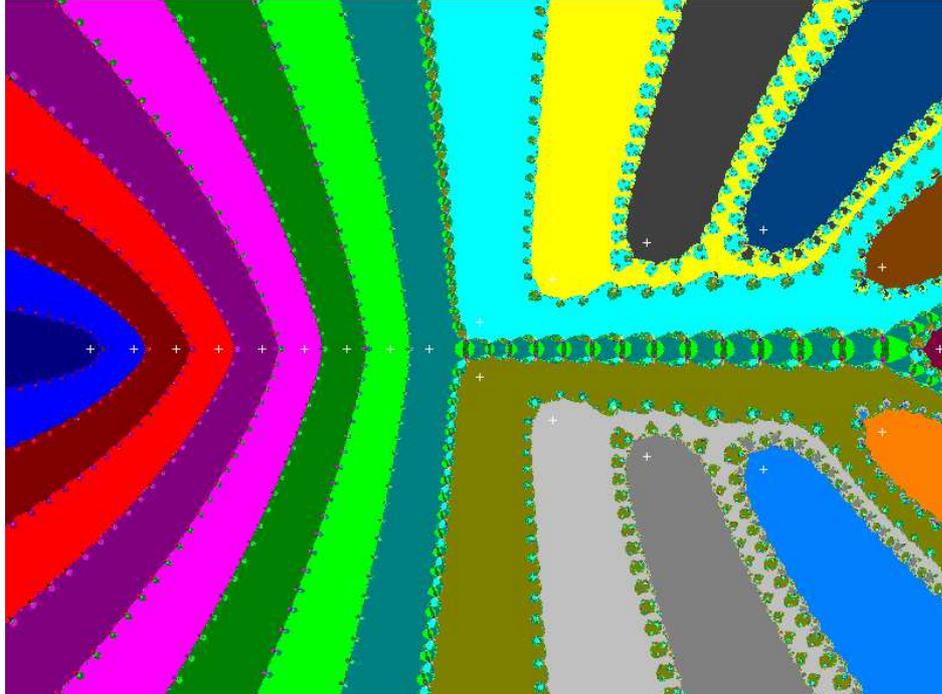
単精度の丸め誤差程度の摂動を加えただけで、

$g(x)$ の根は、半分近くが共役複素根になる!

これらを複素平面の各点を初期値とする複素ニュートン法で求めたものが

次ページの図: (num7-3.f)

(色分けは 20 個の根のどこに収束するかで初期値の点を分類.)





● 最も初等的な **Bernoulli 法 (冪乗法)**:

$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$: A の固有値

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N$: 対応する固有ベクトルの正規直交系

一つ目の固有値と固有ベクトルの求め方:

$\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{u}_1 + c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_N \mathbf{u}_N$ を勝手な初期ベクトルの展開として

$$A^n \mathbf{x}_0 = c_1 \lambda_1^n \mathbf{u}_1 + c_2 \lambda_2^n \mathbf{u}_2 + \dots + c_N \lambda_N^n \mathbf{u}_N$$

は, 第1項がどんどん優位になる. よって, 今 $\mathbf{x}_n := \frac{A \mathbf{x}_{n-1}}{\|A \mathbf{x}_{n-1}\|}$ と置けば,
 n が十分大きいとき, $A \mathbf{x}_n \doteq \lambda_1 \mathbf{x}_n$, i.e.

$$\lambda_1 \doteq \frac{A \mathbf{x}_n \text{ の第 } j \text{ 成分}}{\mathbf{x}_n \text{ の第 } j \text{ 成分}} \quad (j \text{ は成分の大きい番号を選ぶ}), \quad \mathbf{u}_1 \doteq \frac{A \mathbf{x}_n}{\|A \mathbf{x}_n\|}$$

二つ目は $\mathbf{x}_0 = c_2 \mathbf{u}_2 + \dots + c_N \mathbf{u}_N$ なる初期ベクトルから出発する.

(勝手な \mathbf{x}_0 から $\mathbf{x}_0 - (\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1$ として求まる.)

すると, 今度は $A^n \mathbf{x}_0$ で \mathbf{u}_2 の項がどんどん優位になる.

ただし, 丸め誤差のため, \mathbf{u}_1 の項が小さな係数で混ざって来ると,
 そいつが次第にのさばって来るので,

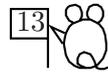
毎回, $A \mathbf{x}_n$ を $A \mathbf{x}_n - (A \mathbf{x}_n, \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1$ で置き換え, \mathbf{u}_1 の混入を防ぐ.

三つ目は $\mathbf{x}_0 = c_3 \mathbf{u}_3 + \dots + c_N \mathbf{u}_N$ なる初期ベクトルから出発する.

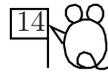
(勝手な \mathbf{x}_0 から $\mathbf{x}_0 - (\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2$ で求まる.)

以下同様.

このアイデアで, 大きい方から数個の固有値と固有ベクトルは十分求まる.



- 1 プログラム見本 `num7-1.f` のソースを読み, 実行してみる. これは $-u'' + u = x^3 - 7x$ の $[-1, 1]$ 上の斉次ディリクレ境界条件付き境界値問題を 100 等分により離散化して得られる 99 次の行列方程式 $AX=F$ をヤコビ法で解いたものである. 結果をグラフで描くので
`g77 num7-1.f xgrf.o -lX11 -L/usr/X11R6/lib -o num7-1`
でコンパイルする. 同様に `num7-1b.f` も試してみよ.
- 2 プログラム見本 `num7-2.f` のソースを読み, 実行してみる. これは上と同じ行列方程式をガウス-ザイデル法で解いたものである. 結果をグラフで描くのでコンパイルは上と同様にする. 収束までに必要な反復回数を比較せよ. 同様に `num7-2b.f` も試してみよ.
- 3 プログラム見本 `num7-3.f` を実行し, 美しい図を味わえ. これは Wilkinson 多項式の根を求める Newton 法の吸引領域を描画したものである. コンパイルの仕方は上と同様.
- 4 調和振動子の離散化行列の固有値と固有ベクトルを求めるためのプログラム見本 `num7-4.f` を実行し, 結果を理論と比較せよ. コンパイルの仕方は上と同様.



問題 7.1 R^N のベクトルの上限ノルムを

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq N} |x_i|$$

で定めるとき、ノルムの性質

(1) $\|\mathbf{x}\|_\infty \geq 0$, また $\|\mathbf{x}\|_\infty = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}$

(2) $\|\lambda \mathbf{x}\|_\infty = |\lambda| \|\mathbf{x}\|_\infty$

(3) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_\infty \leq \|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty$

を満たすことを示せ.

問題 7.2 N 次正方行列 $A = (a_{ij})$ において,

$$a_{ii} > \sum_{1 \leq j \leq N, j \neq i} |a_{ij}|$$

が各 $i = 1, \dots, N$ について成り立つものを対角優位行列と呼ぶ.
対角優位行列に対して Jacobi 法が収束することを次の順で示せ.

(1) $A = D + B$ と対角・非対角部分の和に分けるととき, 行列の作用素ノルム $\|D^{-1}B\|_\infty < 1$ となる. ここに,

$$\|A\|_\infty := \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_\infty}{\|\mathbf{x}\|_\infty}$$

は, 上限ノルムに関する A の作用素ノルムを表す.

(2) 縮小写像の定理を適当な写像に適用せよ.