

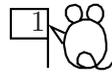
数値計算講義 第 10 回  
偏微分方程式の初期値問題の近似解法



カーネンコ アレクセイ  
金子 晃

[kanenko@mbk.nifty.com](mailto:kanenko@mbk.nifty.com)  
[alexei.kanenko@docomo.ne.jp](mailto:alexei.kanenko@docomo.ne.jp)  
<http://www.kanenko.com/>

## 偏微分方程式とその近似解法



世の中の数値計算のほとんどを占める.

### ● 主な単独方程式:

● 熱方程式:  $\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u$  熱伝導, 拡散

● 波動方程式:  $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$  波動の伝播

● Laplace 方程式  $\Delta u = 0$ , Poisson 方程式:  $\Delta u = f$  種々の定常状態

ここに,  $\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  は Laplacian と呼ばれる微分演算子.

### ● 主な連立方程式:

● Navier-Stokes 方程式: 流体の運動

● 弾性体の方程式: ダムや橋や建物などの安定性と揺れの計算

● 電磁波の方程式: アンテナ等の設計

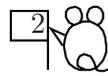
### ● 3 大数値解法:

● スペクトル法

● 差分法

● 有限要素法

熱方程式の導出 (空間1次元の場合)



熱伝導の法則:

熱は温度の高い方から低い方へ流れる.

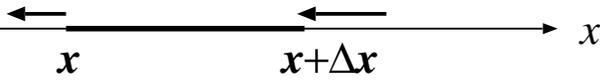
流れる量は温度勾配に比例する (比例定数  $k$  が熱伝導率).

熱量の保存則:

針金の微小区間  $[x, x + \Delta x]$  における時間当たりの熱量の変化は、その時間内にこの区間の境界から流れ込んだ熱量の総和に等しい.

比熱 (正確には単位長さ当たりの熱容量) を  $c$  として

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(t, x + \Delta x)$$



$$\int_x^{x+\Delta x} \{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)\} c dx = k \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right\} \Delta t$$

$$\parallel \qquad \qquad \qquad \parallel$$

$$c \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t \Delta x \qquad \qquad \qquad k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \Delta x \Delta t$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (\nu = \frac{k}{c})$$

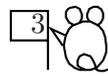
拡散方程式としての説明:

拡散量は、溶質の濃度勾配に比例して、濃い方から薄い方に移動する.

物質量の保存則を書くと、上と同じ式が得られる.

(この場合  $c = 1$  であり、 $k$  は拡散係数と呼ばれる物質定数になる.)

熱方程式の初期-境界値問題の差分法 (numa-1.f)



有限な長さの針金の両端の温度を一定にして (境界条件),  
 針金に勝手に与えた初期温度分布 (初期条件) から,  
 その後の針金の温度分布の時間的変化を予測する.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < t < T, a < x < b, \\ u(a, t) = u(b, t) = 0, & 0 < t < T \text{ (斉次 Dirichlet 条件)}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & a < x < b \text{ (初期条件)} \end{cases}$$

熱方程式の差分近似

$$\frac{u(x, t+k) - u(x, t)}{k} = \nu \frac{u(x+h, t) + u(x-h, t) - 2u(x, t)}{h^2}$$

1 階前進差分

2 階中心差分

$$\therefore u(x, t+k) = \left(1 - \frac{2\nu k}{h^2}\right)u(x, t) + \frac{\nu k}{h^2}u(x+h, t) + \frac{\nu k}{h^2}u(x-h, t)$$

区間  $[a, b]$  を  $N$  等分し,  $h = \frac{b-a}{N}$ , また  $\frac{\nu k}{h^2} = \lambda$  が定数となるようにして,

$u_i^j := u(a+hi, jk)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  と書けば,

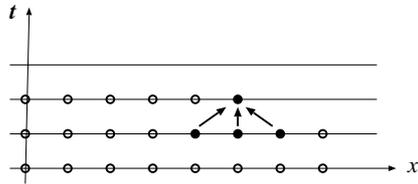
$u_i^0 = \varphi_i := \varphi(a+ih)$  (時刻 0 での値は初期値から決まる),

$$u_i^j = (1 - 2\lambda)u_i^{j-1} + \lambda u_{i+1}^{j-1} + \lambda u_{i-1}^{j-1}$$

ただし,  $u_0^j, u_N^j = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$  (両端での値は境界条件から決まる)

この漸化式から, 初期-境界値問題は簡単に解ける.

(行列の掛け算さえもプログラムする必要がない.)



BLOCK DATA

COMMON /PARS/IXMIN,IXMAX,IYMIN,IYMAX,XMIN,XMAX,YMIN,YMAX

DATA IXMIN/0/,IXMAX/799/,IYMIN/0/,IYMAX/599/,

+ XMIN/0.0/,XMAX/1.0/,YMIN/-2.0/,YMAX/2.0/

END

PROGRAM HEAT

PARAMETER(N=80)

REAL\*4 U(0:N,0:1)

COMMON /PARS/IXMIN,IXMAX,IYMIN,IYMAX,XMIN,XMAX,YMIN,YMAX

HX=(XMAX-XMIN)/N

WRITE(\*,\*)'Ratio k/h<sup>2</sup> :'

READ(\*,\*)ALMBDA

HT=HX\*HX\*ALMBDA

I=0

X=XMIN

DO 100 J=0,N

U(J,I)=AINITO(X)

X=X+HX

100 CONTINUE

WRITE(\*,\*)'Push c on the graphic window to continue.'

WRITE(\*,\*)'Push q there to quit.'

CALL INIT(IXMIN,IYMIN,IXMAX,IYMAX)

CALL DRAW(U(0,I),N,HX)

IF (KEY().EQ.0) STOP

150 I1=I; I=1-I

U(0,I)=0

DO 200 J=1,N-1

U(J,I)=(1-2\*ALMBDA)\*U(J,I1)+ALMBDA\*(U(J+1,I1)+U(J-1,I1))

200 CONTINUE

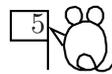
U(N,I)=0

CALL DRAW(U(0,I),N,HX)

IF (KEY().EQ.1) GO TO 150

END

## プログラミングの注意点



● 全ての時間ステップの計算結果を記録する必要はない。

現在と直前の2 時間ステップ分だけでよい。

(結果は、リアルタイムで描画するか、ファイルに書き出してゆく.)

こういうときは、2 次元配列  $U(0:N,0:1)$  を回して使うと効率的:

$U(j,0)$  に直前の結果  $\Rightarrow U(j,1)$  に現在の結果  $\Rightarrow U(j,0)$  に次の結果.

まとめると、 $U(j,k) \Rightarrow U(j,1-k)$  と常に書け、 $k \Rightarrow 1-k$  で交替する。

● 配列の参照渡し

`CALL DRAW(U(0,1),...)` の最初の引数は、2 次元配列  $U$  の中間アドレスを渡しており、サブルーチンの方では、そこから先

$U(0,1), U(1,1), U(2,1), \dots, U(N,1)$

を通常の1 次元配列として宣言し取り扱うことができる。

● 初期値の設定

FORTRAN では、変数や配列の初期値を `DATA` 文で与えることができる。

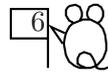
(コンパイル時に値がセットされる.)

しかし、`COMMON` 宣言された変数や配列の初期値設定は、

**BLOCK DATA** 文というそれ専用の副プログラムで行わねばならない。

この際、変数や配列は、名前付き **COMMON BLOCK** というものにまとめ、

以下の `COMMON` 文では必ずこの名前を添付する。



### 熱方程式の導出 (空間3次元の場合)

#### 熱伝導の法則:

熱は温度の高い方から低い方へ流れる.

流れる量は温度勾配に比例する (比例定数が熱伝導率).

#### 熱量の保存則:

物質中のある部分領域における時間当たりの熱量の変化は,  
その時間内にこの領域の境界から流れ込んだ熱量の総和に等しい.

以上を微小部分領域  $\Delta V$  に適用した等式を書くと, 体積比熱を  $c$  として

$$\iiint_{\Delta V} \{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)\} cdV = k \iint_{\partial \Delta V} \nabla u \cdot \mathbf{n} dS \cdot \Delta t$$

|| (Gauss の発散定理)

$$c \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t \Delta V = k \iiint_{\Delta V} \Delta u dV \doteq k \Delta u \Delta V$$

故に  $\Delta t, \Delta V \rightarrow 0$  として

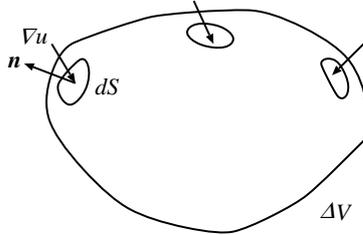
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \Delta u \quad (\nu = \frac{k}{c}).$$

※  $\nabla u := (\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z})$  (勾配演算子)

※ Gauss の発散定理は

$$\iiint_{\partial D} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_D \operatorname{div} \mathbf{f} dV$$

ここに,  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$  に対し,  $\operatorname{div} \mathbf{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$



熱方程式の差分法 (空間2次元の場合) (numa-2.f)



簡単のため,  $\nu = 1$  とし, 考えている領域は長方形  $[a_0, a_1] \times [b_0, b_1]$  とする  
 時間微分は, メッシュ幅を  $h_t$  と書くとき,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u(x, y, t + h_t) - u(x, y, t)}{h_t}$$

で近似する.

空間微分は, メッシュ幅を  $h_x = (a_1 - a_0)/M, h_y = (b_1 - b_0)/N$  と置けば,

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(x + h_x, y, t) + u(x - h_x, y, t) - 2u(x, y, t)}{h_x^2} + \frac{u(x, y + h_y, t) + u(x, y - h_y, t) - 2u(x, y, t)}{h_y^2}$$

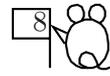
で差分化.

よって, 漸化式は略記号  $u_{i,j}^k := u(a_0 + ih_x, b_0 + jh_y, kh_t)$  を用いて,

$$u_{i,j}^{k+1} = \left\{1 - 2\left(\frac{h_t}{h_x^2} + \frac{h_t}{h_y^2}\right)\right\} u_{i,j}^k + \frac{h_t}{h_x^2} u_{i+1,j}^k + \frac{h_t}{h_x^2} u_{i-1,j}^k + \frac{h_t}{h_y^2} u_{i,j+1}^k + \frac{h_t}{h_y^2} u_{i,j-1}^k$$

空間1次元の場合と同様, この漸化式を行列を使わず直接プログラムするのが最も簡単.

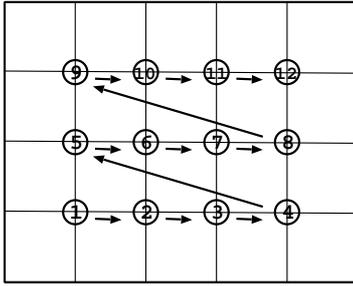
上の漸化式を行列で表現する場合, まず問題となるのは,  
2次元的な量  $u_{i,j}^k$  を1次元ベクトルとしてどう表現するか.



一つの表現法 (かなり標準的):

下図の左下の格子点から右上の格子点まで矢印の順にたどり,  
1本の縦ベクトルの成分とする (便宜上横に記す):

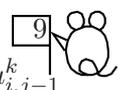
$$u_{1,1}^k, u_{2,1}^k, \dots, u_{M-1,1}^k, u_{1,2}^k, u_{2,2}^k, \dots, u_{M-1,2}^k, \dots, u_{1,N-1}^k, u_{2,N-1}^k, \dots, u_{M-1,N-1}^k$$



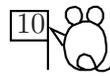
未知ベクトルの第  $i$  成分の位置

すると, 先の漸化式は, 次のような帯状行列による積で実現される:

$$u_{i,j}^{k+1} = \left\{ 1 - 2\left(\frac{h_t}{h_x^2} + \frac{h_t}{h_y^2}\right) \right\} u_{i,j}^k + \frac{h_t}{h_x^2} u_{i+1,j}^k + \frac{h_t}{h_x^2} u_{i-1,j}^k + \frac{h_t}{h_y^2} u_{i,j+1}^k + \frac{h_t}{h_y^2} u_{i,j-1}^k$$



$$= \begin{pmatrix} u_1^{k+1} \\ u_2^{k+1} \\ \vdots \\ u_{(M-1)(N-1)}^{k+1} \end{pmatrix} \begin{matrix} \xleftarrow{M-1} & \xrightarrow{M-1} & \\ \left( \begin{matrix} 1 - \frac{2}{h_x^2} - \frac{2}{h_y^2} & \frac{1}{h_x^2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{h_y^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{h_x^2} & 1 - \frac{2}{h_x^2} - \frac{2}{h_y^2} & \frac{1}{h_x^2} & & & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & & & & \frac{1}{h_y^2} \\ 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \frac{1}{h_y^2} & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & 0 \\ 0 & & & & & & & & \frac{1}{h_x^2} \\ \vdots & \ddots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{h_y^2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{h_x^2} & 1 - \frac{2}{h_x^2} - \frac{2}{h_y^2} \end{matrix} \right) & \begin{pmatrix} u_1^k \\ u_2^k \\ \vdots \\ u_{(M-1)(N-1)}^k \end{pmatrix} \end{matrix}$$



空間1次元の波動方程式は、両端を固定した有限な長さの弦の振動の方程式として既に導いた：

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < t < T, a < x < b, \\ u(a, t) = u(b, t) = 0, & 0 < t < T \text{ (斉次 Dirichlet 条件)}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), & a < x < b \text{ (初期条件)} \end{cases}$$

波動方程式の差分近似

$$\frac{1}{c^2} \frac{u(x, t+k) + u(x, t-k) - 2u(x, t)}{k^2} = \frac{u(x+h, t) + u(x-h, t) - 2u(x, t)}{h^2}$$

2 階中心差分 2 階中心差分

$$\therefore u(x, t+k) = 2\left(1 - \frac{c^2 k^2}{h^2}\right)u(x, t) + \frac{c^2 k^2}{h^2}u(x+h, t) + \frac{c^2 k^2}{h^2}u(x-h, t) - u(x, t-k)$$

区間  $[a, b]$  を  $N$  等分し,  $h = \frac{b-a}{N}$ ,  $\lambda = \frac{ck}{h}$  と置いて,

$u_i^j := u(a+hi, jk)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$  と書けば,

$$u_i^0 = \varphi_i := \varphi(a+ih) \text{ (既知の値)},$$

$$u_i^1 = u_i^0 + k \frac{\partial u}{\partial t}(a+ih, 0) = u_i^0 + k\psi(a+ih) \text{ (既知の値)},$$

$$u_i^j = 2(1 - \lambda^2)u_i^{j-1} + \lambda^2 u_{i+1}^{j-1} + \lambda^2 u_{i-1}^{j-1} - u_i^{j-2}$$

$$\text{ただし, } u_0^j, u_N^j = 0, j = 1, 2, \dots$$

この漸化式から、波動方程式の初期-境界値問題は熱方程式と同様に解ける。

ただし今度は3ステップ分の記憶が必要：

$U(i, j)$ ,  $j=0, 1, 2$  を使い回し,

$U(i, j \bmod 3)$  と  $U(i, j+1 \bmod 3)$  とから  $U(i, j+2 \bmod 3)$  を計算した後,

$j \implies j+1 \bmod 3$  で更新する。

空間2次元の場合: (numa-4.f)

波動方程式の導出は省略するが、方程式の意味は膜の微小振動のモデルである。  
最も簡単な長方形の膜  $D = [a_0, a_1] \times [b_0, b_1]$  の場合、初期-境界値問題は

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < t < T, (x, y) \in D \\ u(x, y, t) = 0, & 0 < t < T, (x, y) \in \partial D \text{ (斉次 Dirichlet 条件)}, \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = \psi(x, y), & (x, y) \in D \text{ (初期条件)} \end{cases}$$

差分法は、時間座標については空間1次元の波動方程式にならい、  
空間座標については、空間2次元の熱方程式に倣えばよい。

$$u_{i,j}^0 = \varphi_{i,j} := \varphi(a_0 + ih_x, b_0 + jh_y) \text{ (既知の値)},$$

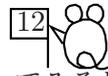
$$u_{i,j}^1 = u_{i,j}^0 + h_t \frac{\partial u}{\partial t}(a_0 + ih_x, b_0 + jh_y, 0) = u_{i,j}^0 + h_t \psi(a_0 + ih_x, b_0 + jh_y)$$

(既知の値),

$$u_{i,j}^k = 2\left(1 - \frac{c^2 h_t^2}{h_x^2} - \frac{c^2 h_t^2}{h_y^2}\right) u_{i,j}^{k-1} + \frac{c^2 h_t^2}{h_x^2} u_{i+1,j}^{k-1} + \frac{c^2 h_t^2}{h_x^2} u_{i-1,j}^{k-1} \\ + \frac{c^2 h_t^2}{h_y^2} u_{i,j+1}^{k-1} + \frac{c^2 h_t^2}{h_y^2} u_{i,j-1}^{k-1} - u_{i,j}^{k-2}$$

ただし,  $u_{0,j}^k, u_{N,j}^k, u_{i,0}^k, u_{i,M}^k = 0, k = 1, 2, \dots$

## 差分スキームの安定性条件



空間1 次元の熱方程式  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  の差分解法のプログラムを実行してみると

- $\lambda := \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2}$  のとき (Courant-Friedrichs-Lewy の条件, CFL 条件)  
数値解は安定で、いつまでも存在し続ける,
- $\lambda := \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} > \frac{1}{2}$  のとき不安定で、近似解は時間の経過とともに振動を始め、やがて爆発する.

という現象が見られる. この数学的正当化:

上の場合,  $0 < \lambda \leq 1/2$  ということなので,

$$\begin{aligned} |u_i^j| &= |(1 - 2\lambda)u_i^{j-1} + \lambda u_{i+1}^{j-1} + \lambda u_{i-1}^{j-1}| \\ &\leq \{(1 - 2\lambda) + \lambda + \lambda\} \max_{0 \leq i \leq N} |u_i^{j-1}| = \max_{0 \leq i \leq N} |u_i^{j-1}| \end{aligned}$$

すなわち,

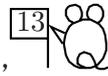
$$\max_{0 \leq i \leq N} |u_i^j| \leq \sup_{0 \leq i \leq N} |u_i^{j-1}|$$

これを, 数値解の最大値ノルムが単調非増加であるという.

この不等式はある意味で数値解の安定性を保証している.

(少なくとも無限に大きくなったりはしない.)

差分スキームの安定性条件 (続き)



逆に,  $\lambda > 1/2$  のときは, 簡単のため考察する区間を  $[0, 1]$  として,

初期値が  $\sin n\pi x = \text{Im} [e^{n\pi\sqrt{-1}x}]$  のとき,

後で一齐に虚部を取れば同じなので, 簡単のため複素数で計算すると

$$u_i^0 = e^{n\pi\sqrt{-1}ih},$$

$$u_i^1 = (1 - 2\lambda)e^{n\pi\sqrt{-1}ih} + \lambda e^{n\pi\sqrt{-1}(i+1)h} + \lambda e^{n\pi\sqrt{-1}(i-1)h}$$

$$= \{1 - \lambda(2 - e^{n\pi\sqrt{-1}h} - e^{-n\pi\sqrt{-1}h})\}e^{n\pi\sqrt{-1}ih}$$

$$= \{1 - 2\lambda(1 - \cos n\pi h)\}e^{n\pi\sqrt{-1}ih}$$

$$= (1 - 4\lambda \sin^2 \frac{n\pi h}{2})e^{n\pi\sqrt{-1}ih}$$

以下同様にして,

$$u_i^k = (1 - 4\lambda \sin^2 \frac{n\pi h}{2})^k e^{n\pi\sqrt{-1}ih}$$

となることが示せる. よって,  $\sin \frac{n\pi h}{2} \sim 1$  なる  $n$  については,

絶対値が 1 より大きな因子の冪乗がかかるので, 数値解は

ステップ数について指数的に増大する. 従って実質的に有限時間で爆発する.

このことは微小定数  $\varepsilon$  が掛かっているとしても同じである.

更に, 漸化式が線型なので, 初期値にこのような加法因子が含まれれば,

数値解にも指数増大する加法因子が含まれ, やはり爆発する.

## 差分スキームの安定性 (おまけ)



全く同様にして、空間1次元の波動方程式  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  の差分解について

●  $\lambda := \frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1$  のとき、数値解は安定で、いつまでも存在し続ける、

●  $\lambda := \frac{c\Delta t}{\Delta x} > 1$  のとき不安定で、近似解は時間の経過とともに振動を始め、やがて爆発する。

という現象が見られる。この数学的正当化は、熱方程式の場合と同様だが、最大値ノルムの代わりに  $L_2$  ノルムが必要なので、少し高級。

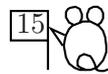
波動方程式の場合は、上の安定性の条件は、差分スキームが、依存領域の情報をすべて取り込んでいることと解釈され、物理的にも非常に自然である。

どのような差分スキームを考えても、この条件が満たされない限り、波動方程式の妥当な解とは言えない。

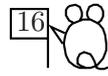
これに対し、熱方程式の安定性の条件は、差分スキームを変えると不要になる、有る意味で人工的なものである。

(ただし、 $k$  と  $h^2$  が同じ無限小のオーダーであるべきことというのは、物理的に自然な要請である。)

新しい差分スキームを考えるだけでなく、それによる数値解の安定性や得られた解の正当性の研究をするのが、偏微分方程式の数値解析である。



- 1 numa-1.f および, numa-2.f を実行し,  
熱方程式の初期-境界値問題の時間前進差分による近似解の  
安定性の条件を数値的に検証してみる.  
[  $\lambda$  としていろいろな値を入力し, 差分が荒れ始める時間を比較せよ.  
また, 不安定になったときに生ずる細かい振動の振幅は何で決まるか  
観察せよ.]
- 2  $\lambda = 0.5$  ととったときに, 解のグラフがまず最初に正規分布の曲線に近付き,  
次いで正弦曲線に近づくことを観察する.
- 3 numa-3.f および, numa-4.f を実行し, 波動方程式の  
初期-境界値問題の時間中心差分による近似解の安定性の条件を  
数値的に検証してみる.
- 4 熱の湧き出しを含む空間1次元の熱方程式
 
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1+x^2)e^{-t}, & 0 < t < T, -1 < x < 1, \\ u(-1, t) = u(1, t) = 0, & 0 < t < T \text{ (斉次 Dirichlet 条件)}, \\ u(x, 0) = 1 - x^2, & -1 < x < 1 \text{ (初期条件)} \end{cases}$$
 は解析解  $u = (1 - x^2)e^{-t}$  を持つ. これを差分法により  
numa-1.f, または numa-1b.f を修正して得られる数値解と比較せよ.  
(例年,  $e^{-t}$  がプログラムできない人がたくさん居るので,  
ぜひやってみましょう.)



問題 1 空間1次元熱方程式の初期値-境界値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad u(t, -1) = 0, \quad u(t, 1) = 0$$

を考える。ただし、

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < -0.5, \\ 2x + 1, & 0.5 \leq x < 0, \\ -2x + 1, & 0 \leq x < 0.5, \\ 0, & 0.5 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

とする。

(1) 少し時間が経ったときの解のグラフはどんな形になるか？

(2) 沢山時間が経ったときの解のグラフはどんな形になるか？

問題 2 上の問題を差分法で解く手順を記せ。更に、区間  $[-1, 1]$  の分割を4等分として、時間ステップを2だけ進めたときの解を記せ。