ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 6 - 1 9 7 7

PROLONGEMENT DES SOLUTIONS ANALYTIQUES REELLES D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES A COEFFICIENTS CONSTANTS

par A. KANEKO

Exposé n° XVIII

8 Mars 1977

§ 0. INTRODUCTION

Le problème du prolongement des solutions des équations aux dérivées partielles a été d'abord étudié systématiquement pour les systèmes surdéterminés par Ehrenpreis, Malgrange etc. (voir [2], [17]) pour généraliser le théorème de Hartogs de la théorie des fonctions de plusieurs variables. D'autre part il existe des équations qui admettent le prolongement pour des solutions régulières. Les premiers résultats à ce propos ont été donnés par Grušin dans le cas d'une singularité isolée pour des solutions indéfiniment différentiables ([3], [4]). Inspiré par ces travaux, j'ai commencé des études sur le prolongement des solutions régulières, surtout analytiques réelles, et obtenu quelques résultats ([5], [14]). Ici je vais présenter un premier résultat dans le cas d'une singularité compacte pour les solutions analytiques réelles des équations à coefficients constants, car il est décisif bien qu'un peu ancien. Mes autres résultats sont seulement partiels. Nous renvoyons donc le lecteur aux mémoires originaux (voir surtout le sommaire et la perspective dans [14]).

§ 1. ENONCE DU THEOREME

Soit $p(D)$ un opérateur aux dérivées partielles linéaires à coefficients constants dans R^n. Soit $K \subset R^n$ un compact tel que $R^n \setminus K$ soit connexe. Soit U un voisinage ouvert de K. Pour un ouvert U, nous désignons en général par $\underline{A}(U)$ l'espace des fonctions analytiques réelles sur U et par $\underline{A}_p(U)$ le sous-espace des solutions nulles de $p(D)$.

<u>Théorème 1.1</u> : Les deux énoncés suivants sont équivalents :

1) Tout élément $u \in \underline{A}_p(U \setminus K)$ peut se prolonger (de façon unique) à un élément de $\underline{A}_p(U)$.

2) $p(D)$ n'a aucun facteur elliptique.

<u>Remarque 1.2</u> : La condition 2) dépend des termes inférieurs comme le montre l'exemple $D_1(D_1 + iD_2) + 1$ dans R^2 .

Remarque 1.3 : L'hypothèse que $R^n \setminus K$ soit connexe est évidemment nécessaire, car sinon on peut donner des solutions indépendantes dans différentes composantes.

La partie 1) ⇒ 2) est facile. En effet, supposant que p(D) a un facteur elliptique q(D), on peut donner une solution analytique réelle non prolongeable $E(x - x_o)$ de p(D), où E est une solution élémentaire de q(D) et $x_o \in K$; dans les paragraphes suivants nous allons donner la démonstration de la partie 2) ⇒ 1) qui se fera en plusieurs étapes.

§ 2. DEMONSTRATION DE LA SUFFISANCE DANS LE CAS OU p(D) EST IRREDUCTIBLE ET $K = \{|x| \leq A\}$.

Dans ce paragraphe, nous supposons que p(D) est non elliptique et irréductible, et que K est égal à une boule $\{|x| \leq A\}$; sous cette hypothèse nous montrerons que tout $u \in \underline{A}_p(U \setminus K)$ peut se prolonger à un élément de $\underline{A}_p(U)$. Choisissons un petit $\varepsilon > 0$ tel que $\{|x| \leq A + 2\varepsilon\} \subset U$. Prenons $\chi(x) \in C_o^\infty(U)$ tel que supp $\chi \subset \{|x| \leq A + 2\varepsilon\}$ et que $\chi(x) \equiv 1$ sur $\{|x| \leq A + \varepsilon\}$. Alors $p(D)((1-\chi)u)$ est une fonction indéfiniment différentiable sur $U \setminus K$, à support dans la couronne $T = \{A + \varepsilon \leq |x| \leq A + 2\varepsilon\}$. On peut donc la considérer comme un élement de $C_o^\infty(R^n)$ en la prolongeant par zéro. En y appliquant la transformation de Fourier et restreignant le résultat à la variété $N(p) = \{\zeta \in C^n ; p(\zeta) = 0\}$ on obtient une fonction holomorphe sur cette variété :

$$u \longmapsto \tilde{d}.u(\zeta) = \widetilde{p(D)((1-\chi)u)}\big|_{N(p)}$$

(transformation de Grušin). Il est facile de voir que :

Lemme 2.1 : $\tilde{d}.u(\zeta)$ ne dépend pas du choix de $\chi(x)$.

Pour obtenir une estimation utile pour mesurer la croissance de $\tilde{d}.u(\zeta)$, rappelons un résultat classique :

Lemme 2.2 : Il existe des constantes b, c telles que pour chaque entier $N \geq 0$. on peut trouver une fonction $\chi(x)$ vérifiant les hypothèses ci-dessus et :

$$\sup_{x \in T} |D^\alpha \chi| \leq c b^N \alpha! \qquad \text{pour } |\alpha| \leq N.$$

Utilisant ce lemme, on obtient :

<u>Lemme 2.3</u> : La transformée de Grušin de u satisfait à l'inégalité :

$$|\tilde{d}.u(\zeta)| \le C \exp(-\delta|\zeta| + (A+2\varepsilon)|\operatorname{Im}\zeta|),$$

où C, δ sont des constantes positives dépendant de u.

<u>Démonstration</u> : Soit m l'ordre de p(D). En vertu de la formule de Leibniz on a :

$$p(D)((1-\chi)u) = \sum_{\substack{|\alpha|+|\beta|\le m \\ |\alpha|>0}} a_{\alpha,\beta} D^\alpha\chi\, D^\beta u$$

avec des coefficients $a_{\alpha,\beta}$ définis par p(D). Notons que le support du second membre est contenu dans la couronne $T = \{A+\varepsilon \le |x| \le A+2\varepsilon\}$. Puisque u est analytique dans T, ses dérivées satisfont à : $|D^\beta u| \le c' b'^{|\beta|}\beta!$ avec des constantes c', b' . On a donc

$$|\zeta^\gamma \widetilde{p(D)((1-\chi)u)}| = |\widetilde{D^\gamma p(D)((1-\chi)u)}|$$

$$\le C \exp((A+2\varepsilon)|\operatorname{Im}\zeta|)\Sigma|a_{\alpha,\beta}| \sum_{\gamma_1+\gamma_2=\gamma} \frac{\gamma!}{\gamma_1!\gamma_2!} \sup_{x\in T}|D^{\gamma_1+\alpha}\chi|\, c' b'^{|\gamma_2+\beta|}(\gamma_2+\beta)!$$

En choisissant χ comme dans le lemme 2.2 avec N+m au lieu de N, on obtient :

$$|\zeta|^N|\widetilde{du}(\zeta)| \le$$

$$C'\exp((A+2\varepsilon)|\operatorname{Im}\zeta|)\,\Sigma|a_{\alpha,\beta}| \sum_{\substack{|\gamma|=N \\ \gamma_1+\gamma_2=\gamma}} \frac{\gamma!}{\gamma_1!\gamma_2!}\, b^{|\gamma_1+\alpha|}(\gamma_1+\alpha)!\, b'^{|\gamma_2+\beta|}(\gamma_2+\beta)! \le$$

$$C''\exp((A+2\varepsilon)|\operatorname{Im}\zeta|)\, b''^N N!$$

avec d'autres constantes C'', b'' qui ne dépendent pas de χ.
Dans l'inégalité

$$\frac{|\zeta|^N}{b''^N N!}\,|\tilde{d}.u(\zeta)| \le C''\exp((A+2\varepsilon)|\operatorname{Im}\zeta|)$$

on peut prendre donc le maximum par rapport à N et on obtient

$$e^{\delta|\zeta|}|\tilde{d}.u(\zeta)| \le C''\exp((A+2\varepsilon)|\operatorname{Im}\zeta|)$$

avec une constante $\delta > 0$.

Supposons maintenant que $p(D)$ est non elliptique. Choisissant un système de coordonnées convenable, on peut supposer que la partie principale p_m satisfait à $p_m(1,0,\dots,0) \neq 0$, $p_m(0,0,\dots,1) = 0$
Alors pour chaque $\zeta'' = (\zeta_2,\dots,\zeta_{n-1})$ fixé dans une petite boule $|\zeta''-\zeta''_o| \le \delta$ de centre ζ''_o générique, l'équation algébrique $p(\zeta_1,\zeta'',\zeta_n) = 0$ en ζ_1 a, au moins une racine $\zeta_1 = \tau(\zeta_n)$ holomorphe en ζ_n sur $\operatorname{Im}\zeta_n \ge R$ et satisfaisant à $|\tau(\zeta_n)| \le a|\zeta_n|^q$ pour des constantes positives a et $q<1$.
Considérons la fonction d'une variable

$$G(\zeta_n) = \tilde{d}.u(\tau(\zeta_n),\zeta'',\zeta_n).$$

Elle est holomorphe dans $\operatorname{Im}\zeta_n \ge R$ et satisfait à l'inégalité :

$$\begin{aligned}|G(\zeta_n)| &\le C_{\zeta''}\exp(-\delta|\zeta_n| + a|\zeta_n|^q + (A+2\varepsilon)|\operatorname{Im}\zeta_n|)\\ &\le C'_{\zeta''}\exp(-\delta'|\zeta_n| + (A+2\varepsilon)|\operatorname{Im}\zeta_n|).\end{aligned}$$

On a un autre résultat classique.

<u>Lemme 2.4</u> (Carlson) . Une fonction holomorphe d'une variable dans $\operatorname{Im}\zeta_n \ge R$ qui satisfait à la condition ci-dessus s'annule identiquement.

Pour la démonstration voir [18].

Nous avons donc démontré que $\tilde{d}.u(\zeta) \equiv 0$ dans un ouvert de la variété $N(p)$. Puisque $N(p)$ est irréductible on a l'unicité du prolongement analytique et on conclut que $\tilde{d}.u(\zeta)$ s'annule sur $N(p)$ tout entier.

<u>Lemme 2.5</u> : Pour chaque χ on peut trouver une fonction entière $F(\zeta)$ telle que $\widetilde{p(D)((1-\chi)u)} = p(\zeta)F(\zeta)$ et que

$$|\zeta|^N|F(\zeta)| \le C^{IV}\exp((A+2\varepsilon)|\operatorname{Im}\zeta|)\, b''^N N!$$

où C^{IV} est une autre constante ne dépendant pas de N.

Ce lemme découle d'un argument bien connu et de l'inégalité de Malgrange.

Donc $F(\zeta)$ est la transformée de Fourier d'une fonction $f(x) \in C_o^{N-n-1}(R^n)$ dont le support est contenu dans la boule $\{|x| \leq A+2\varepsilon\}$. Puisque $p(D)((1-\chi)u-f) = 0$, on a ainsi trouvé un prolongement $v = (1-\chi)u - f$ de classe C^{N-n-1}. Il est bien connu que dans cette situation, le prolongement est unique. Donc v est en réalité un prolongement de classe C^∞. De plus, en vertu de l'inégalité du lemme 2.5, il satisfait à

$$|D^\gamma v(x)| \leq C^V b'''^{|\gamma|}\gamma! ,$$

où C^V, b''' sont d'autres constantes qui ne dépendent pas de γ. Donc v est le prolongement analytique réel voulu. CQFD.

§ 3. REDUCTION AU CAS OU p(D) EST IRREDUCTIBLE

Soit $p(D) = p_1(D)\dots p_s(D)$ la décomposition irréductible (numérotée en tenant compte de la multiplicité), dont chaque facteur est non elliptique. Prenons $u \in \underline{A}_p(U\setminus K)$. En appliquant le résultat démontré ci-dessus pour l'opérateur irréductible $p_s(D)$, on peut trouver l'extension $v \in \underline{A}_{p_s}(U)$ de $p_1(D)\dots p_{s-1}(D)u \in \underline{A}_{p_s}(U\setminus K)$. Soit w une solution analytique réelle de l'équation $p_1(D)\dots p_{s-1}(D)w = v$ définie dans un voisinage $V \subset U$ de K. On a en effet un théorème d'existence car on suppose que K est une boule, donc compacte et convexe ; voir e.g. [15]). Alors on a $p_1(D)\dots p_{s-1}(D)(u-w) = 0$ dans $V\setminus K$. Par récurrence sur le nombre de composantes s on peut supposer que $u-w$ peut se prolonger sur V comme une fonction analytique réelle. Donc il en est de même de u. Il est clair que le prolongement appartient à $\underline{A}_p(U)$.

§ 4. REDUCTION AU CAS OU K EST CONVEXE

Soit maintenant K un compact tel que $R^n\setminus K$ soit connexe et U son voisinage ouvert. Supposons que la boule $L = \{x \leq A\}$ contient K et posons $V = \{x < 2A\}$. Prenons $u \in \underline{A}_p(U\setminus K)$. Grâce à la trivialité de la cohomologie du faisceau $\underline{A}$ (voir [16]), on peut trouver $v \in \underline{A}(R^n \setminus K)$ et $w \in \underline{A}(U)$ tel que $u = v - w$ sur $U \setminus K$. Par hypothèse $p(D)v$ et $p(D)w$ se recollent sur $U \setminus K$, et définissent donc un élément $h \in \underline{A}(R^n)$. Soit $g \in \underline{A}(V)$ une solution de $p(D)g = h$. On obtient ainsi un élément $v - g \in \underline{A}_p(V \setminus K)$. Par l'hypothèse sur K, on a l'injection $\underline{A}_p(V \setminus K) \hookrightarrow \underline{A}_p(V \setminus L)$. D'autre part, par le résultat précédent, $v - g$, considéré comme un élément de $\underline{A}_p(V \setminus L)$, peut se prolonger sur L. On a ainsi démontré que $v - g$, donc v, donc u peut se prolonger comme une fonction analytique réelle au voisinage de K.

<u>Remarque 4.1</u> : La présentation ci-dessus diffère du mémoire original [6]. Pour simplifier nous avons évité l'emploi de la théorie des hyperfonctions qui devient cependant indispensable pour l'étude de singularités plus compliquées. La réduction au cas où K est convexe a été introduite dans {9}. Le même argument donne l'isomorphisme

$$\underline{A}_p(U \setminus K)/\underline{A}_p(U) = H^1_K(U, \underline{A}_p).$$

Ce fait est moins évident en comparaison aux isomorphismes correspondants pour d'autres espaces de solutions, car il arrive que $H^1(U, \underline{A}_p) \neq 0$ même pour un ouvert convexe U (voir e.g. [1]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. De Giorgi : Solutions analytiques des équations aux dérivées partielles à coefficients constants, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-72, Exposé 29.

[2] L. Ehrenpreis : A new proof and an extension of Hartogs' theorem, Bull. Amer. Soc. 67 (1961), 507-509.

[3] V. V. Grušin : Sur les équations Q-hypoelliptiques, Mat. Sb. 57 (1962), 233-240 (en russe).

[4] V. V. Grušin : Singularités isolées des solutions des équations aux dérivées partielles à coefficients constants, Trudy Moskov. Mat. Obšč. 15 (1966), 262-278 (en russe).

[5] A. Kaneko : Sur la singularité isolée des équations aux dérivées partielles à coefficients constants, Sûrikaiseki-kenkyûsho Kôkyûroku 108 (1971), 72-83 (en japonais).

[6] A. Kaneko : On continuation of regular solutions of partial differential equations to compact convex sets, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. 1A, 17 (1970), 567-580 ; II ibid. 18 (1972), 415-433.

[7] A. Kaneko : On continuation of regular solutions of partial differential equations with constant coefficients, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 92-123.

[8] A. Kaneko : On linear exceptional sets of solutions of linear partial differential equations with constant coefficients, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 11 (1976), 441-460.

[9] A. Kaneko : Note on continuation of real analytic solutions of partial differential equations with constant coefficients, Proc. Japan Acad. 51 (1975), 262-264.

[10] A. Kaneko : On the singular spectrum of boundary values of real analytic solutions, J. Math. Soc. Japan (à paraître).

[11] A. Kaneko : On continuation of regular solutions of linear partial differential equations with real analytic coefficients, Proc. Japan Acad. 51 (1975), 798-801.

[12] A. Kaneko : Singular spectrum of boundary values of solutions of partial differential equations with real analytic coefficients, Sci. Pap. Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo 25 (1975), 59-68.

[13] A. Kaneko : Analyticity of minimal dimensional singularity of real analytic solutions, ibid. 26 (1976), 1-5.

[14] A. Kaneko : On continuation of regular solutions of linear partial differential equations, Proc. Oji Seminar Publ. RIMS Kyoto Univ. 12 supplement 1977 (à paraître).

[15] H. Komatsu : Relative cohomology of sheaves of solutions of differential equations, Séminaire Lions-Schwartz, 1966 (voir Lecture Notes in Math. 287, Springer, 1973, pp. 192-261).

[16] B. Malgrange : Faisceaux sur des variétés analytiques réelles Bull. Math. Soc. France, 83 (1957), 231-237.

[17] B. Malgrange : Systèmes différentiels à coefficients constants, Séminaire Bourbaki, 15 (1962), Exposé 246.

[18] E. C. Titchmarsh : The theory of functions, Oxford, 1932.