線型偏微分方程式の Gevrey 級解の接続について

東京大学数理科学研究科[1]　　金子　　晃

要約　最近書いた同名のプレプリントに従い，線型偏微分方程式の Gevrey 級の解の薄い特異点集合の除去可能性に関する必要条件と十分条件を概観する．

§0. 序

本講演では，線型偏微分方程式の Gevrey 級の解の薄い特異点集合への接続 (言い換えれば，薄い特異点集合の除去可能性) に関する諸結果を報告する．殆どの結果は小生のプレプリント [7] から採られたものである．時間の制約のため，定数係数の方程式に話を限る．

まず問題の意味の説明から始めよう．K を局所閉集合，Ω をその一つの近傍とする．このとき問題は $P(D)u = 0$ の $\Omega \setminus K$ で定義された解 u が何時 Ω 全体まで解として延びるかを究めることである．以下，K のことを解の特異点集合と略称するが，u は K の上では解になって居らず，通常用いられる “解の正則性が失われる点”という意味での特異点とは異なることに注意されたい．

この種の問題が意味を持つためには，十分滑らかな解を考察する必要がある．というのは，基本解，すなわち $P(D)E = \delta$ の解 E は常に $P(D)u = 0$ の $K = \{0\}$ 以外で定義された解を与え，かつ容易に分かるようにこれは解としては K へ接続不可能である．更に，解が準解析的でないときは，K は薄くなければならない．実際，もし K が空でない内核を持てば，このクラスの函数で台がそこに含まれるもの φ をとるとき $P(D)u = \varphi$ の $\boldsymbol{R}^n$ における解 u は K の外で K には接続できないような $P(D)u = 0$ の解を与えることが容易に分かる．我々がこれから考察する Gevrey 級の函数も準解析的でないことに注意されたい．

この方面の最初の結果は Grushin [3] により与えられた．彼は実単純特性方向を持った定数係数の線型偏微分方程式の C^∞ 級の解の孤立特異点が除去可能なことを示した．我々の除去可能性に関する議論はすべて彼のこのパイオニア的な仕事に負うている．この問題全般に関する詳細な外観は 1992 年までは [5] に，それ以降は[6] にある．後者はいくつかの未解決問題を列挙しており，本報告はそのうちの Gevrey 級解に関連した諸問題に対する部分的解答を与えている．

本報告の概要は次の通りである ：§1 にはこの問題に関する基本的事実がまとめられている．§2 では，Gevrey 級の解の薄い特異点集合の除去可能性に対する十分条件を与える．§3 では上に与えた条件の必要性を論ずる．これは §2 と反対の状況下で薄い特異点集合を持った Gevrey 級の解を構成する問題である．例として，Schrödinger 方程式に対して薄い特異点集合が存在するような Gevrey 正則性の指数の臨界値が決定されている．

[1] 97 年 4 月よりお茶の水女子大学理学部情報科学科

§1. 解の接続に関する基本的事実

ここでは我々の問題設定の意味での解の接続に関する基本的事実をまとめておく．以下，Gevrey 級の解に関して述べるが，結果は多くのクラスの解について共通に成り立つものである．$P(D)$ を定数係数線型偏微分作用素とする．ここに $P(\zeta)$ は n 変数 $\zeta = (\zeta_1, ..., \zeta_n)$ の多項式であり，$D = (D_1, ..., D_n)$, $D_j = -i\partial/\partial x_j$, $j = 1, ..., n$ である．指数 s の Gevrey 級函数を次で定義する ：

$$\mathcal{E}^{(s)}(\Omega) := \{f(x) \in C^\infty(\Omega);\ \forall K \subset\subset \Omega,\ \forall h > 0,\ \exists C = C_{K,h} > 0 \quad \sup_{x \in K} |D^\alpha f(x)| \leq C h^{|\alpha|} \alpha!^s \ \text{ for } \forall \alpha\} \tag{1.1}$$

$\mathcal{E}^{\{s\}}(\Omega)$ は同様に 限定子を $\forall K \subset\subset \Omega$, $\exists h = h(K) > 0$, $\exists C = C(K) > 0$ で置き換えたもので定義する．

更に

$$\mathcal{E}^{1+}(\Omega) := \bigcap_{s>1} \mathcal{E}^{(s)}(\Omega) = \bigcap_{s>1} \mathcal{E}^{\{s\}}(\Omega) \tag{1.2}$$

と置こう．これは準解析的な超可微分函数をまだ豊富に含んだ大変便利な空間である．小松先生の記号法に従い，以下何かを共通に述べられるときは $\mathcal{E}^*(\Omega)$ により $\mathcal{E}^{(s)}(\Omega), \mathcal{E}^{\{s\}}(\Omega), \mathcal{E}^{1+}(\Omega)$ のいずれかの空間を表すことにする．例のように $\mathcal{D}^*(\Omega)$ で $\mathcal{E}^*$ 級の函数のうち，台が Ω 内のコンパクト集合となるものの全体を表す．これには自然な位相を与えて，その双対空間，すなわちこのクラスの超分布の空間を導入する．

一般に，$\mathcal{E}^*_P(\Omega)$ により Ω で定義された方程式 $P(D)u = 0$ の $\mathcal{E}^*$ 級の解の全体を表す．$K \subset \Omega$ を薄いコンパクト集合としよう．ここに “薄い” とは，内核が空であることをいう．我々は以下，更に K がある超平面，例えば $\nu \cdot x = 0$ に含まれていると仮定する．(これは K が凸なら自動的に満たされる仮定である．) $\mathcal{E}^*(\Omega \setminus K)$ における $P(D)u = 0$ の解を $\mathcal{E}^*(\Omega)$ における解まで接続することを考える．

まず最初に容易にわかることは

命題 1.1　Ω から $\Omega \setminus K$ への制限写像から誘導される自然な写像

$$\mathcal{E}^*_P(\Omega) \to \mathcal{E}^*_P(\Omega \setminus K)$$

は単射である．言い換えれば，$P(D)u = 0$ の解で台がコンパクトなものは存在しない．

従って商空間

$$\mathcal{E}^*_P(\Omega \setminus K)/\mathcal{E}^*_P(\Omega) \tag{1.3}$$

はこのクラスの解を集合 K へ接続するための障碍を与える．次に，この障碍空間は K のみに依存し Ω には依存しないことに注意しよう．これは初等的に示せるが，実は方程式 $Pu = 0$ のクラス $\mathcal{E}^*$ の解層 $\mathcal{E}^*_P$ に係数を持つ局所コホモロジーと関連している ：

命題 1.2　次の同型がある ：

$$\mathcal{E}^*_P(\Omega \setminus K)/\mathcal{E}^*_P(\Omega) \tilde{=} H^1_K(\Omega, \mathcal{E}^*_P) \tag{1.4}$$

証明はいくつかの完全列をつなげてなされるが，$H^1(\Omega, \mathcal{E}_P^*)$ は特に $* = \{s\}$ 型のクラスに対しては Ω が凸でも必ずしも消えないので，議論は完全に general nonsense という訳でもない．

これと他のいくつかの完全列を組み合わせると次が示せる ：

系 **1.3**　$P = Q_1^{m_1} \cdots Q_N^{m_N}$ を $P(\zeta)$ の重複度も考えた既約成分への分解とするとき，

$$H_K^1(\Omega, \mathcal{E}_P^*) \tilde{=} \prod_{j=1}^{N} [H_K^1(\Omega, \mathcal{E}_{Q_j}^*)]^{m_j} \tag{1.5}$$

が成り立つ．従って特に，(1.3) が自明となるのは各既約成分に対応した同様の障碍空間がすべて自明となるときである．

(1.5) はきれいすぎて気持が悪いが，以下我々が必要とするのは最後に述べた結論だけであり，それは以前からさんざん用いてきたものである．

§2. 定数係数の方程式に対する Gevrey 級の解の接続

我々の最初の主結果は

定理 **2.1**　K を超平面 $\nu \cdot x = 0$ に含まれるコンパクト集合とせよ．更に，$P(\zeta)$ の各既約成分は ν を非正則度 $\leq \mu$ の特性方向として持つとする．このとき

$$\mathcal{E}_P^{(s)}(\Omega \setminus K)/\mathcal{E}_P^{(s)}(\Omega) = 0, \qquad s \leq \mu/(\mu - 1) \quad \text{のとき},$$

$$\mathcal{E}_P^{\{s\}}(\Omega \setminus K)/\mathcal{E}_P^{\{s\}}(\Omega) = 0, \qquad s < \mu/(\mu - 1) \quad \text{のとき}$$

ここで，特性方向 ν の非正則度 μ の定義は次の通り ：ξ を固定し

$$Q(s,t) := P(t\xi + s\nu) = q_0(\xi)t^m + q_1(s;\xi)t^{m-1} + \cdots + q_m(s;\xi)$$

を二変数 (s,t) の多項式と見て，その t に関する各根を s につき Puiseux 級数に展開したときの支配冪，すなわち最高次の冪指数を考察する．(これらの根はそれぞれ代数多様体 $N(Q)$ の無限遠点 $(\infty, 0)$ を通る既約芽に対応している．) これら支配冪の最小値を κ とするとき $\mu = (1-\kappa)^{-1}$ と置くのである．より正確な定義は無限遠点を原点に移して Newton 図形を用いてなされる．一般に μ は特性方向 ν の重複度を越えない．

注意　ここで云う非正則度は，いわば “最良非正則度” とも云うべきものであって，双曲性の定義に出てくる非正則度は最も大きい支配冪に対応する値，すなわち “最悪の” ものが用いられているのとは対照的である．

全ての Gevrey 級の共通部分を用いると結果はより簡明になる ：

系 **2.2**　$P(\zeta)$ の全ての既約成分が非楕円型であれば，$\mathcal{E}^{1+}$ 級の解の孤立特異点は除去可能である．すなわち，

$$\mathcal{E}_P^{1+}(\Omega \setminus \{0\})/\mathcal{E}_P^{1+}(\Omega) = 0$$

この最後の条件は [4] で与えられた $P(D)$ の実解析解に対する孤立特異点の除去可能性の条件と同一であることに注意されたい．

証明の概略　§1 で準備した諸命題により，一般性を失うことなく $P(D)$ は既約で K, Ω は凸と仮定できる．まず最初に，Grushin 表現を復習する :$u(x) \in \mathcal{E}^*_P(\Omega \setminus K)$ が与えられたとき，それを K の ε-近傍 K_ε で修正して $\mathcal{E}^*(\Omega)$ の元 $[u]$ に延長する．すると $P(D)[u] \in \mathcal{D}^*(K_\varepsilon)$ となるから，その Fourier 変換 $F(\zeta) = \widehat{P(D)}[u]$ は整函数となり，Paley-Wiener 型の定理により $* = (s)$ のときは $\forall h > 0$ に対し $\exists C = C(h) > 0$ を以て，$* = \{s\}$ のときは $\exists h = h(\varepsilon) > 0, C > 0$ を以て

$$|F(\zeta)| \leq C_h e^{-h|\mathrm{Re}\,\zeta|^{1/s} + H_K(\mathrm{Im}\,\zeta) + \varepsilon|\mathrm{Im}\,\zeta|} \tag{2.1}$$

の形の評価式を満たす．ここに H_K は K の台函数を表す．$F(\zeta)$ を P の特性多様体

$$N(P) := \{\zeta \in \boldsymbol{C}^n;\ P(\zeta) = 0\}$$

に制限したものは $N(P)$ 上の同じ評価を持つ大域的な正則函数となるが，これは u の修正 $[u]$ の選び方にも ε にもよらずに定まる．実際，そのような任意の二つの修正の差はある $v \in \mathcal{D}^*(K_\varepsilon)$ を以て $P(D)v$ の形に書ける．ここに，ε は大きい方の値とする．よってこれは Fourier 変換して $N(P)$ 上に制限すれば消えて無くなる．こうして Grushin 表現:

$$H^1_K(\Omega, \mathcal{E}^*_P) \to \widehat{\mathcal{E}^*(K)}[N(P)] \tag{2.2}$$

が定まる．ここで右辺はもちろん評価式 (2.1) を満たす $N(P)$ 上の大域的な正則函数の空間を表している．

いわゆる Ehrenpreis-Palamodov 基本原理の一つの形は，(2.2) のようなものが位相的同型となることを主張する．(s) 型の場合，これは実際に成立するが，$\{s\}$ 型の場合には部分的にしか成り立たない（後出の命題 2.3 を見よ）．しかし解の接続を示すためには，写像 (2.2) の単射性さえあればよく，それは容易に示せる．よって定理の証明のためには，障碍 $H^1_K(\Omega, \mathcal{E}^*_P)$ の (2.2) による像が自明となることを示せば十分である．

ここで，座標系を $\nu = (0, ..., 0, 1)$ かつ $(1, 0, ..., 0)$ が非特性方向となるように取ろう．以下，$\zeta'' = (\zeta_2, ..., \zeta_{n-1})$ のような略記法を用いる．仮定により $\zeta'' = \zeta''_0$ を生成的に取り，$\delta > 0$ を小さくすれば，ζ'' を $|\zeta'' - \zeta''_0| \leq \delta$ 内に固定したとき ζ_1 の方程式 $P(\zeta_1, \zeta'', \zeta_n) = 0$ の根 $\zeta_1 = \tau(\zeta'', \zeta_n)$ で ζ_n につき $|\zeta_n| \geq 1/\delta$ で多価解析的，かつ次のような評価式を満たすものが存在する :

$$|\tau(\zeta'', \zeta_n)| \leq C|\zeta_n|^{(\mu-1)/\mu}$$

今用いている座標系については $K \subset \{x_n = 0\}$, 従って

$$H_K(\eta) \leq A|\eta_1| + A|\eta''|, \qquad H_{K_\varepsilon}(\eta) \leq (A+\varepsilon)|\eta_1| + (A+\varepsilon)|\eta''| + \varepsilon|\eta_n|$$

となるから，固定した各 ζ'' について z の一変数函数

$$G(z) := F(\tau(\zeta'', z), \zeta'', z)$$

で，$|z| \geq 1/\delta$ において多価正則，かつそこで

$$|G(z)| \leq C_\varepsilon e^{-h|z|^{1/s} + (A+\varepsilon)C|z|^{(\mu-1)/\mu} + \varepsilon|\mathrm{Im}\,z|} \tag{2.3}$$

を満たすものが得られる．ここで仮定により $1/s \geq (\mu-1)/\mu$ であるが，$* = (s)$ のときは $h > (A+1)C$ に選ぶことができ，また $* = \{s\}$ のときは仮定により $1/s > (\mu-1)/\mu$ である．

よっていずれにしても ε が任意に小さくできることから Phragmén-Lindelöf の原理を $G(z)$ に適用して $G(z)$ が $\mathrm{Im}\, z \geq 1/\delta$, 及び $\mathrm{Im}\, z \leq -1/\delta$ で，従って $|z| \geq 1/\delta$ で有界なことが結論できる．さて，$G(z)$ の $z = \infty$ における多価性は $\tau(\zeta'', z)$ のそれから来ており，従ってそれは z の Puiseux 展開で表現される程度のものであるから，適当な整数 $q \geq 1$ について $H(w) := G(w^q)$ は $w = \infty$ のまわりで一価正則かつ有界となる．故に Riemann の孤立特異点の除去可能性定理が適用でき，$H(w)$ は $w = \infty$ においても正則となる. 他方，評価 (2.3) により $H(w)$ は実軸に沿って $|w|$ のどんな逆冪よりも速く減少しているから，$w = \infty$ での Taylor 展開は自明でなければならない. かくして $H(w) \equiv 0$, 従って $G(z) \equiv 0$ と結論される.

以上により $F(\zeta_1, \zeta'', \zeta_n) = 0$ が集合

$$N(P) \cap \{(\zeta_1, \zeta'', \zeta_n);\ |\zeta'' - \zeta_0''| \leq \delta,\ |\zeta_n| \geq 1/\delta,\ \zeta_1 = \tau(\zeta'', \zeta_n)\}$$

上で示されたが，これは既約代数多様体 $N(P)$ 上の開集合を含むから，これより $F(\zeta) \equiv 0$ が $N(P)$ 上で成り立つことが結論される．これは始めに注意したように解の接続可能性を意味する．
∎

次節において障碍が自明でないことを論ずるときには (2.2) の全射性も必要になる ：

命題 **2.3**　(2.2) は代数的同型である．

これは Ehrenpreis-Palamodov の基本原理ににおける常套の論法と帰納極限の代数的完全性により示すことができる．

この節の最後に Grushin が [2] で与えた弱特異性の除去可能性定理のアナロジーを与えておこう．$\mathcal{E}^*$ 級の解 u の特異点集合が弱いとは，u が特異点集合の近傍に $\mathcal{D}^{*\prime}$ 級の超分布として延長できることを云う．また $P(D)$ がクラス $\mathcal{E}^*$ で準楕円型とは，$P(D)$ が $\mathcal{D}^{*\prime}$ 級の基本解で，原点以外では $\mathcal{E}^*$ 級の正則性を持つものが存在することを云う．これは $P(D)u = 0$ の $\mathcal{D}^{*\prime}$ 級の局所解が必ず $\mathcal{E}^*$ 級の正則性を持つことと同値である．

定理 **2.4**　$P(D)u = 0$ の $\mathcal{E}^*$ 級の解の弱い孤立特異点が常に除去可能であるためには，$P(D)$ がクラス $\mathcal{E}^*$ で準楕円型の既約因子を含まないことである．

証明は [7] を見られたい．

§3. コンパクトな特異点集合を持った Gevrey 級の解を許す方程式．

この節では，前節で述べたような Gevrey 級の解に対する接続定理が成立しないような定数係数の方程式のクラスを与える．準備の議論は前節と同様に通用するので，ここでも既約な作用素に限って論ずれば十分である．

まず始めに，準楕円型の方程式は孤立特異点を持った C^∞ 級の解を許すことを思い出そう．我々の場合，これは次のようになり，定理 2.1 の条件の必要性を説明してもいる．

命題 **3.1**　正定数 $q \geq 1$ 及び δ が存在して

$$|\mathrm{Im}\, \zeta| \geq \delta |\mathrm{Re}\, \zeta|^{1/q} \quad \text{on} \quad \zeta \in N(P) \cap \{|\zeta| \geq 1/\delta\} \tag{3.1}$$

となっているとせよ．このとき $s > q$ に対しては $\mathcal{E}^{(s)}$ 級の，また $s \geq q$ に対しては $\mathcal{E}^{\{s\}}$ 級の $P(D)u = 0$ の解で除去不可能な孤立特異点を持つものが存在する．

これは基本解を用いるか，あるいは $N(P)$ 上の函数 $F(\zeta) \equiv 1$ を評価し命題 2.3 を適用して示すことができる．$q = 1$ のときは楕円型の方程式に対応することに注意．

Grushin の驚くべき発見は，準楕円型ではないにも拘わらず除去不可能な孤立特異点を含んだ解を許すような方程式の存在であった．Grushin は単に二三の例を示しているだけだが，我々はそれをできる限り一般化することを試みよう．次の結果は Grushin の例 $D_1^3 - D_2^2$ を一般化するものである．この作用素は明らかに準楕円型ではない．我々は主張の一般性を尊重して，まず薄い特異点集合の場合を論じ，孤立特異点の場合は後で論ずることとしよう．

定理 **3.2**　$P(D)$ を次のような形の二変数の作用素とする．

$$P(D) = D_1^m - aD_2^k + \cdots, \qquad k < m, \qquad a \neq 0 \tag{3.2}$$

ここに，$\cdots$ は準斉次の重みの意味で低階の部分を表す．このとき，任意に指定した $s > m/k$ に対し $P(D)u = 0$ は $x_2 = 0$ に含まれるコンパクト集合 K を除去不可能な特異点集合とする $\mathcal{E}^{\{s\}}$ 級の解を持つ．

この作用素に対しては特性方向 $(0,1)$ は重複度 m で非正則度 $\mu = m/(m-k)$,従って $\mu/(\mu-1) = m/k$ となっていることに注意されたい．

証明の概略　$q > 1$ は 1 に近いものとし，$\psi(t) \in \mathcal{D}^{\{q\}}(\boldsymbol{R}^1)$ を採る．

$$|\widehat{\psi}(\tau)| \leq Ce^{-A|\tau|^{1/q} + B|\operatorname{Im}\tau|} \tag{3.3}$$

である．

$$F(\zeta_1, \zeta_2) = \widehat{\psi}(\zeta_1)|_{N(P)}$$

と置こう．漸近形

$$|\zeta_1| \sim |a|^{1/m} |\zeta_2|^{k/m} \tag{3.4}$$

により，$F(\zeta)$ が

$$|F(\zeta)| \leq C_\varepsilon e^{-A'|\zeta|^{k/qm} + B|\operatorname{Im}\zeta_1|}$$

を満たすことを示すことができる．これは直線 $x_2 = 0$ に含まれる特異点集合 $|x_1| \leq B$ を持ち，かつ $s = qm/k$ に対しては $\mathcal{E}^{\{s\}}$ 級，また $s > qm/k$ に対しては $\mathcal{E}^{(s)}$ 級となるような解に対応する．q はいくらでも 1 に近くとれるから，これより定理の主張が得られる．∎

$s < m/k$ に対しては定理 2.1 によりそのような解は存在しないことに注意せよ．上の定理は，その証明の容易さにも拘わらず general nonsence ではない．自明な方はむしろ $a_1 \neq 0$ であるような直線 $a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ に含まれる薄い集合 K の場合である．これに対しては $1 < s < m/k$ なる s について $P(D)$ の弱双曲性を用いて特異性を持つ解を構成できる ：

命題 **3.3**　$P(D)$ を前定理の作用素とするとき，任意に指定した $s > 1$ に対し $P(D)u = 0$ は $\mathcal{E}^{(s)}$ 級，あるいは $\mathcal{E}^{\{s\}}$ 級の解で $x_1 = bx_2$ 内の薄いコンパクト集合 K を特異点とするような解を持つ．

次に，孤立特異点を持つ解を構成しよう．残念ながら，上の特殊な形に限ってもまだ結果は完全ではない．次の補題は本質的には Boas [1] の定理 $4.1.1$, $4.1.8$ に含まれている ：

補題 3.4　任意の $\delta > 0$ に対し $p_\delta > 1$ を適当に選ぶことにより，$1 < p \le p_\delta$ なる p を固定する毎に一変数の整函数 $G(\tau)$ で，適当な定数 $B > A > 0$ を以て

$$|G(\tau)| \le Ce^{-A|\tau|^{1/p}}, \quad \text{on} \ \ \mathrm{Re}\,\tau \ge \delta|\mathrm{Im}\,\tau|,$$
$$|G(\tau)| \le Ce^{B|\tau|^{1/p}}, \quad \text{on} \ \ \mathrm{Re}\,\tau \le \delta|\mathrm{Im}\,\tau|$$

という評価式を満たすものが存在する．

変数 τ のスケーリングにより B は予め与えたどんな定数よりも小さくできる，あるいは A は予め与えたどんな定数よりも大きくできることに注意せよ (もちろん，それぞれ残りの定数 A あるいは B はこれに比例して変化する)．

定理 3.5　$P(D)$ を定理 3.2 の作用素とし，更に $a \neq 0$ は実，m は奇数かつ k は偶数とする．このとき任意に指定した $s > m/k$ に対して $P(D)u = 0$ は孤立特異点を持った $\mathcal{E}^{\{s\}}$ 級，あるいは $\mathcal{E}^{(s)}$ 級の解を許す．.

証明の概略　m は奇数なので，必要なら x_1-軸の符号を変えることにより一般性を失うことなく $a > 0$ と仮定できる．補題 3.4 が保証する一変数の整函数 $G(\tau)$ を 1 に十分近い $p > 1$ に対して用意し，

$$F(\zeta_1, \zeta_2) = G(\zeta_1)$$

と置く．漸近形 (3.4) を思い出せば，領域 $|\mathrm{Im}\,\zeta_1| \le \delta \mathrm{Re}\,\zeta_1$　(実は領域 $\mathrm{Re}\,\zeta_1 \ge \delta|\mathrm{Im}\,\zeta_1|$) において

$$|F(\zeta)| \le Ce^{-A|\zeta_1|^{1/p}} \le C'e^{-(A/2)|\zeta_1|^{1/p} - (A/3)a^{k/m}|\zeta_2|^{k/pm}}$$

が成り立つことが分かる．次に，領域 $|\mathrm{Im}\,\zeta_1| \ge \delta|\mathrm{Re}\,\zeta_1|$ においては $|\zeta_1| \le \sqrt{1+\delta^{-2}}|\mathrm{Im}\,\zeta_1|$, 従って

$$\begin{aligned} |F(\zeta)| &\le Ce^{B|\zeta_1|^{1/p}} \le Ce^{-A|\zeta_1|^{1/p} + (A+B)\sqrt{1+\delta^{-2}}|\mathrm{Im}\,\zeta_1|^{1/p}} \\ &\le C_\varepsilon e^{-(A/2)|\zeta_1|^{1/p} - (A/3)a^{k/m}|\zeta_2|^{k/pm} + \varepsilon|\mathrm{Im}\,\zeta_1|} \end{aligned}$$

が成り立つ．最後に，領域 $|\mathrm{Im}\,\zeta_1| \le -\delta \mathrm{Re}\,\zeta_1$ においては

$$\zeta_1 = \rho e^{\pi i + \theta i}, \quad \text{ここに} \ \ |\theta| \le \mathrm{Arctan}\,\delta$$

と置けば，$\rho \to \infty$ のとき

$$\zeta_2 \sim a^{-m/k}\rho^{m/k}e^{(m/k)\theta i + ((2\ell+1)/k)\pi i}, \qquad \ell = 0, ..., k-1$$

が成り立つ．a, m, k に対する仮定により, δ が十分小さいとき各分枝は

$$\mathrm{Im}\,\zeta_2 \sim a_\ell \rho^{m/k}, \quad \text{with} \ \ a_\ell = a^{-m/k}\sin\left(\frac{m}{k}\theta + \frac{2\ell+1}{k}\pi\right) \neq 0$$

を満たす．よってこの領域ではある $a' > 0$ を以て

$$\begin{aligned} |F(\zeta)| &\le Ce^{B|\zeta_1|^{1/p}} \le Ce^{-A|\zeta_1|^{1/p} + (A+B)|\zeta_1|^{1/p}} \\ &\le C_\varepsilon e^{-(A/2)|\zeta_1|^{1/p} - (A/3)a^{k/m}|\zeta_2|^{k/pm} + \varepsilon|\mathrm{Im}\,\zeta_2|} \end{aligned}$$

が成り立つ．以上により $F(\zeta)$ は原点に孤立特異点を持つ，$s = pm/k$ に対して $\mathcal{E}^{\{s\}}$ 級の，また $s > pm/k$ に対しては $\mathcal{E}^{(s)}$ 級の解の Grushin 変換に対応する評価を満たすことが示された．∎

我々は定理 3.5 で追加された条件は本質的ではなく，単に技術的なものだと信じている．ただし，上の定理が取り扱わなかった範囲のうち，a が実でないときや，m, k がともに偶数で $a < 0$ のときは，作用素は準楕円型となり，孤立特異点を持った解の存在は自明である．定理 2.4 によれば上の定理が保証するような解の特異性は弱いものではあり得ないこともわかる．

我々はまた，$s = m/k$ の場合の $\mathcal{E}^{\{s\}}$ 級の解も作れると信じているが，上の方法では荒すぎてうまく行かない．(ただし補題 3.4 を改良して，$s > m/k$ を予め指定しなくても，そのような任意の s に対して $\mathcal{E}^{(s)}$ 級あるいは $\mathcal{E}^{\{s\}}$ 級の正則性を持った解を与えることはそう難しくない．それには Gevrey 級の函数を少し一般にした非準解析的クラスで $\mathcal{E}^{\{s\}}$ を含み，かつ $\bigcap_{s>m/k} \mathcal{E}^{(s)}$ に含まれるようなものを考えればよい．これはその他の定理についても同様である．)

この節で取り扱った作用素はもちろん非常に特殊なものである．もっと一般の作用素，特に三変数以上の作用素を取り扱うには，多様体 $N(P)$ 上に指定された増大度を持った正則函数を大域的に構成するという興味深い問題を解かねばならない．これは $N(P)$ の各実無限遠点で Puiseux 級数などを用いて局所代数幾何的に作ったそのような函数を多様体に沿って繋げるという，$N(P)$ 上の増大度付きコホモロジーの理論になるものと思われる．Ehrenpreis-Palamodov の基本原理は，$N(P)$ 上に既に存在する増大度付きの大域的正則函数を全空間 $\boldsymbol{C}^n$ に増大度を損なわずに延長するもので，そこで解かれた増大度付きコホモロジー群は $\boldsymbol{C}^n$ 上のものであったことを思えば，この問題は更にその先にあるものと考えられるのである．

最後に，一般次元の Schrödinger 方程式に対して薄い特異性を持った解の存在を示しておこう．

命題 3.6　Schrödinger 方程式に対応する作用素 $P(D) = D_1^2 + \cdots + D_{n-1}^2 - D_n$ を考える．$P(D)u = 0$ は $s > 2$ に対し $* = \{s\}$ あるいは $* = (s)$ について $\mathcal{E}^*$ 級の解で $x_n = 0$ に含まれるような除去不可能なコンパクト特異点集合を持つものを許す．

この証明は 1 に近い $q > 1$ に対して偶函数 $\psi(t) \in \mathcal{D}^{\{q\}}(\boldsymbol{R}^1)$ を取り，, 函数

$$F(\zeta) = \widehat{\psi}(\sqrt{\zeta_1^2 + \cdots + \zeta_n^2})$$

を構成してその評価を見ることによりなされる．この方程式とその特性方向 $\nu = (0, ..., 0, 1)$ については $\mu = \mu/(\mu - 1) = 2$ であることに注意せよ．

この定理で同様の正則性を持った孤立特異点付きの解が作れるかどうかは非常に興味深い問題である．上の証明では特異点集合のサイズ B はいくらでも小さく選べるが 0 にはできない．しかしそれが本当に不可能だという理由も見あたらない．

参考文献

[1] Boas R. Ph.: *Entire Functions*, Academic Press, 1954.

[2] Grushin V.V.: On Q-hypoelliptic equations (in Russian), *Mat. Sb.*, **57** (1962), 233-240.

[3] ———-: On solutions with isolated singularities for partial differential equations with constant coefficients (in Russian), *Trudy Moskov. Mat. Obshch.*, **15** (1966), 262-278.

[4] Kaneko A.: On continuation of regular solutions of partial differential equations to compact convex sets, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec.1A*, **17** (1970), 567-580.

[5] ———-: On continuation of regular solutios of linear partial differential equations, *Banach Center Publications*, **27** (1992), 183-195.

[6] ———-: Some problems on continuation of regular solutios of partial differential equations (Talk at "Workshop on General Theory of Partial Differential Equations and Microlocal Analysis", ICTP, Trieste, September '95), *Preprint Series UTMS, University of Tokyo*, **95-43** , 1995.

[7] ———-: On continuation of Gevrey class solutions of linear partial differential equations, *Preprint Series UTMS, University of Tokyo* **96-14**, 1996.

９７年４月からの住所 :〒１１２ 文京区大塚２－１－１ ,お茶の水女子大学理学部情報科学科
e-mail: kanenko@is.ocha.ac.jp