

コンピュータ・トモグラフィの歴史

— 数学者は何故ノーベル賞を取り損ねたのか? —

お茶の水女子大学理学部情報科学科 金子 晃

§0. 序

コンピュータ・トモグラフィ(CT), すなわち計算機断層撮影法は X 線等の連続照射により人体などの断面図を非破壊的に作成する技術である. 難しいことは云わなくても, 幸いに(?) 自分の脳の CT 像を病院で見る機会を持たれた方は, その美しさに驚嘆された経験がお有りであろう. (次ページに最新の機械による人体の横断面の CT 像を掲げておく.) これは一昔前の断層撮影のぼけた映像をご存じの方にはなおさら新鮮な衝撃を与える.

この技術は 1972 年に, ビートルズのレコードで有名なイギリスの会社 EMI の技師ハウズフィールド¹によって発明された. 実用的な機械の製作はともかくとして, この原理は非常に数学的であり, 一言で言えば, ラドン変換の数値的反転と云うことになる. ハウズフィールドはこの発明により 1979 年度のノーベル賞(生理・医学賞)を受賞したが, 彼とともに, 一人の物理学者コーマック²がこの発明に理論的に寄与したとして併せて受賞した.

しかしながら, この発明で用いられた数学的な原理はすべて数学者により用意されていたものである. うまくやれば数学者がノーベル賞を取れたかもしれないこの希有な機会を, 数学者は何故逃してしまったのであろうか? この点を調べておくことは, 今後の教訓(?!)として大切なことであろう. ^^;

ここで簡単に計算機トモグラフィの原理を述べておく. 今, 有界領域 D で表される物体は, X 線のある割合で吸収する物質からできており, この吸収率 $f(x, y)$ は通常密度とほぼ対応するので, それがわかればこの物体の内部構造がわかるものとする.

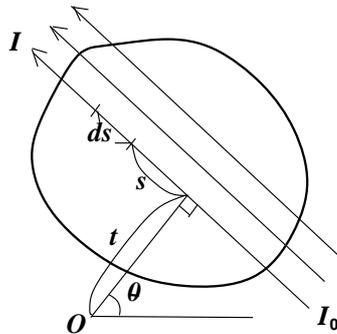


図 1

この物体を貫く直線 $l = \{x \cos \theta + y \sin \theta = t\}$ に沿って光源での強度が I_0 の一本の X 線を当てたとき, ブーゲの法則³により, この X 線の強度 I は

$$\frac{dI}{I} = -f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

¹Hounsfield

²Cormack

³Bouguer

に従って変化する．この簡単な微分方程式はただちに求積でき，その結果，物体を突き抜けた後に観測される X 線の強度として

$$I = I_0 \exp \left\{ - \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds \right\}$$

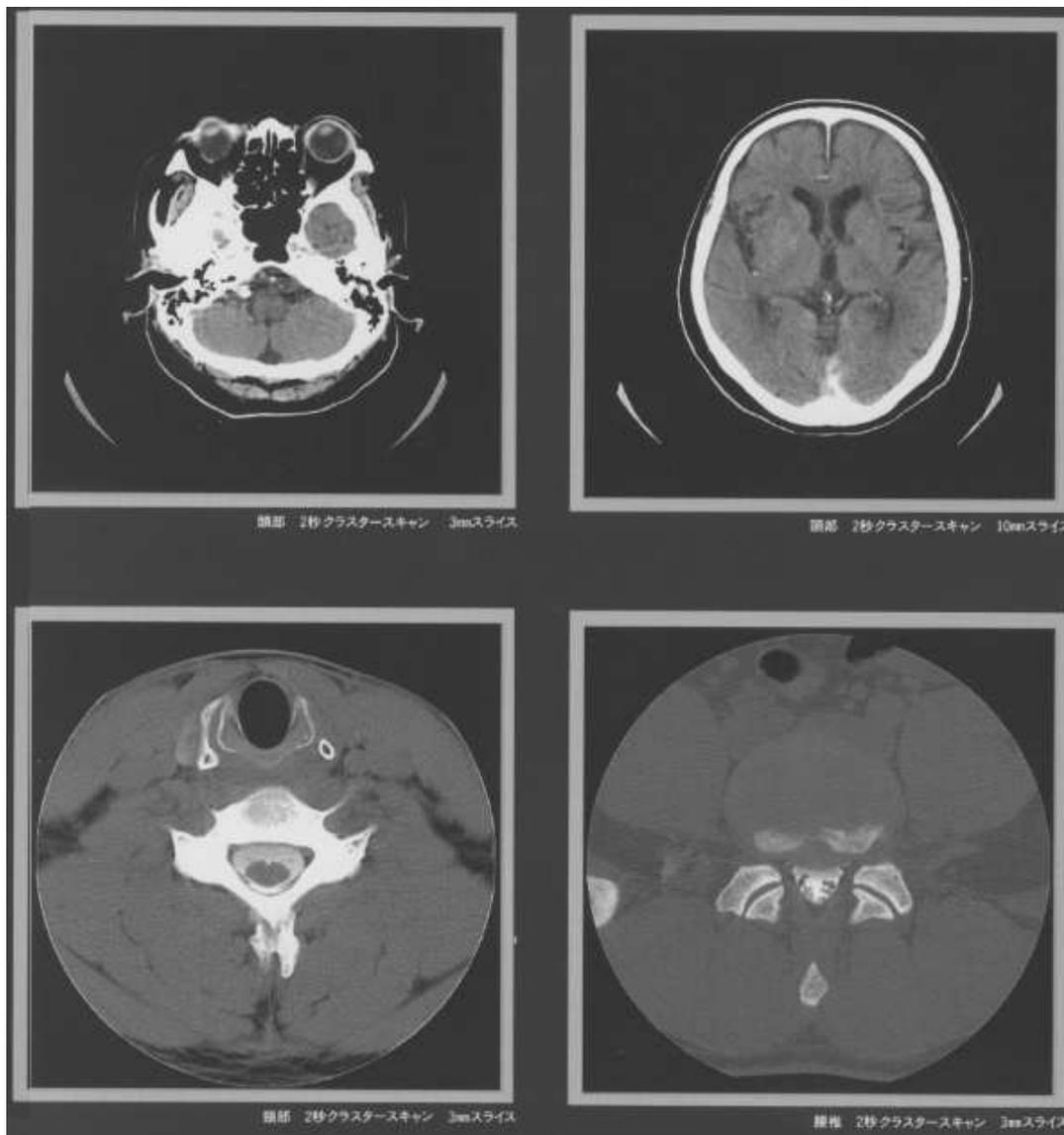


図 2 最新の CT 装置による人体の断面像
(GE 横河メディカルシステムのパンフレット (1994) より)

が得られる．従って，数学的には，各 ℓ に対する線積分の値

$$Rf(\theta, t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

を与えて，元の関数 $f(x, y)$ を再構成せよという問題に帰着し，これはとうの昔に Radon (1917) が解を与えていた．このラドンの論文は CT の前史に関わった技術系の人達にはかなり後まで知られず，単に $Rf(\theta, t)$ を球面平均したものを用いる，いわゆる “old tomography” の再構成公式が何度も再発見されてきた．ラドンの反転公式が知られてからは，その本質を理解するために現場の人たちがにわかに Stieltjes 積分を勉

強し始めたという時代も有ったということである。しかし再構成アルゴリズムの困難さは、反転公式に含まれた Stieltjes 積分の表現の難しさなどではなく、この再構成過程が、一般にコンパクト作用素⁴の逆を求めるときに必ず現れる、いわゆる非適切問題 (ill-posed problem) となっているところにある。

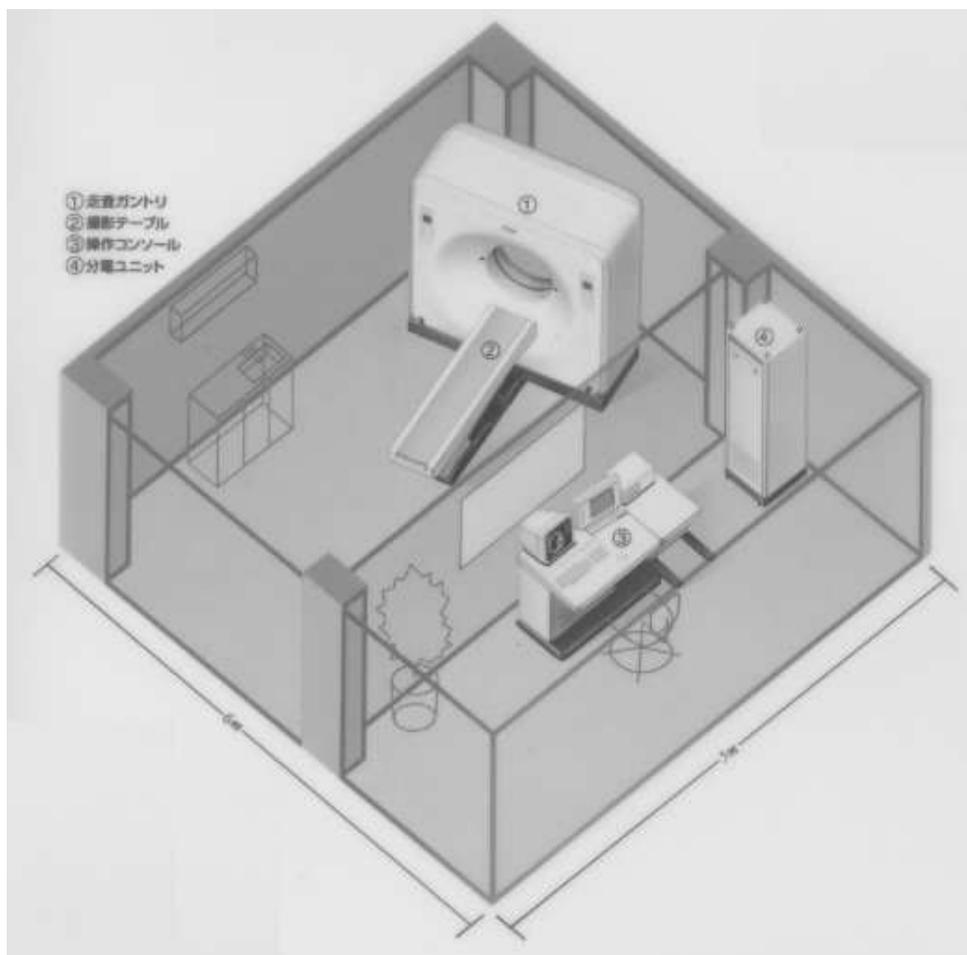


図3 現行の CT スキャン装置の一式
(GE 横河メディカルシステムのパンフレット (1994) による.)

すなわち、数学的には、ラドン変換はすべての (θ, t) の値について誤差のないデータとして与えられるとすることに対し、実用的には、使用できる X 線の本数は高々 180 方向 \times 180 ステップ \approx 3,000 本程度であり⁵、かつ、各線積分は観測誤差を含む。このようなデータから逆作用素を計算すれば、誤差の影響はいくらでも拡大され、計算結果には何の意味も無い、と考えるのがアダマール⁶以来の適切 (well-posed) な問題を研究対象とすべしという解析学の伝統的な考え方であった。これに対し、1960 年頃から始まったチホノフ⁷らによる非適切問題の正則化の理論は、正則性が予め判っている解の存在を仮定して、一言で云えば誤差に含まれる不必要な高周波成分をカットすることにより、近似原像を構成しようというものであった。残念ながらチホノフの理論は、積分方程式の形に抽象化して与えられていたにも拘わらず計算機トモグラフィに応用される機会を逸し、この理論への直接的な応用の論文は、物理学者達によって書かれた。

以上の過程では数学者にも物理学者にも運の良い人、悪い人がいろいろ居て、それなりに面白い物語と

⁴厳密な定義は省略するが、積分のように平滑化の性質を持った作用素を抽象化した概念で、ただの連続作用素よりも良い性質を持つ代わりに逆作用素は (存在したとしても) その分性質が悪くなる。

⁵現行の医療用 CT では 900 チャンネル \times 1000 ビュー程度のデータをとっているそうである。

⁶Hadamard

⁷Tihonov

なっている。では数学者はこの問題でうまくやればノーベル賞を取れる可能性があったのだろうか？ 以下、この問に答えることを目標として CT の原理とその歴史をより詳しく見てゆくこととしよう。

§1. ラドンの反転公式

CT の数学的原理の第一は数学的なラドン変換である。よってここでも最小限のことをまとめておこう。以下、ジュニアの読者には見慣れない記号が現れることと思うが、後を読むためには雰囲気だけを感じとっていただければ十分なので、挿し絵のつもりで眺めてほしい。

普通、ラドン変換と呼ばれるものは \mathbf{R}^n に一般化して考えると、与えられた関数 f に対しその超平面に関する積分値を対応させるもののことを云う： $\omega \in \mathbf{S}^{n-1}, t \in \mathbf{R}$ に対して

$$f(x) \mapsto Rf(\omega, t) = \int_{\omega x=t} f(x) dx \quad (1)$$

これは柱状集合 $Z := \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{R}$ 上の偶関数と解釈される。これに対し X 線 CT により関係が深いのは、 f に対しその直線族に関する積分値を対応させるもので、X 線変換という呼称で上と区別されるのが普通である： $\omega \in \mathbf{S}^{n-1}, x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$f \mapsto Pf(\omega, x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x + t\omega) dt \quad (2)$$

ここに、変換後の変数 x は ω^\perp の上でしか意味を持たない。従って結果は単位球面の接ベクトルバンドル $T := T\mathbf{S}^{n-1} \cong \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{R}^{n-1}$ の上の偶関数となる。(数学的には \pm を同一視して射影空間と類似の空間を導入したくなるであろうが、現場の人にとってはあまり意味のないことであろう。) これらは Gelfand や Helgason のように (あるいはラドン自身も示唆しているように) 一般の次元の線型部分多様体上の積分値を対応させる変換に統一することができるが、それも今の所あまり応用的意味は無いようである。平面 $n=2$ の場合は、両者は一致する。空間 $n=3$ の場合にはラドン変換の方は MRI と呼ばれる電波を用いたスキャン装置で実際に出現する。ここでは (1) に限って知られている反転公式あるいは再構成公式 (すなわち逆変換を与える公式) の代表的なものを記そう。以下 $g(\omega, t) = Rf(\omega, t)$ と置く。まず、Radon (1917), F. John (1934-5), Gelfand-Shilov (1959) により得られたものは

$$f(x) = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} (-\Delta)^{(n-1)/2} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} g(\omega, \omega x) d\omega, \quad (n : \text{奇数のとき}) \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} (-\Delta)^{(n-2)/2} \int_{\mathbf{S}^{n-1}} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dg(\omega, p)}{\omega x - p}, \quad (n : \text{偶数のとき}) \quad (4)$$

と、空間次元の偶奇により形が異なるものであった。特に $n=2$ の場合の式を少々書き直したものがラドンの有名なオリジナル反転公式

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{q} d_q \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{S}^1} g(\omega, \omega x + q) d\omega \right) \quad (5)$$

となる。この公式については吉沢先生の解説に詳しく書かれている。(ラドンは二次元の極座標で表現しているが、ここでは記号を一般次元に合わせてある。) 次に Helgason (1964) はこれらを

$$f(x) = \frac{\Gamma(1/2)}{(4\pi)^{(n-1)/2} \Gamma(n/2)} (-\Delta)^{(n-1)/2} R^\# g, \quad R^\# g(x) := \int_{\mathbf{S}^{n-1}} g(\omega, \omega x) d\omega, \quad (6)$$

と、一つの式にまとめた。ここに $(-\Delta)^{(n-1)/2}$ は n が偶数のときにはいわゆる分数べきとなり、その定義は一般にフーリエ変換を介して

$$(-\Delta)^{(n-1)/2} f(x) := \mathcal{F}^{-1}[|\xi|^{n-1}/2 \widehat{f}(\xi)]$$

で与えられるが⁸, 実はこの例は擬微分作用素導入のきっかけとなったもので, M. Riesz 1949 により Newton ポテンシャルに類似の積分作用素 (Riesz ポテンシャル) として導入された. 同じく, 微分を中に入れてまとめた式

$$f(x) = \frac{\Gamma(1/2)}{(4\pi)^{(n-1)/2}\Gamma(n/2)} R^\# \left[\left| \frac{d}{dp} \right|^{n-1} g \right] \quad (7)$$

を Ludwig (1966) が与えた. $|d/dp|^{n-1}$ は $(-\Delta)^{(n-1)/2}$ の一次元版であるが⁸, n が偶数のときは

$$\left| \frac{d}{dp} \right|^{n-1} = \left(\frac{d}{dp} \right)^{n-1} \circ \text{p.v.} \frac{1}{p}$$

と書き直せる. $(-1/\pi i)\text{p.v.}(1/p) * f(p) = \mathcal{F}^{-1}[\text{sgn}\sigma \hat{f}(\sigma)]$ はいわゆる Hilbert 変換である.)

以上とは関連しているがある意味で独立なものに, ラドン変換をフーリエ変換と結びつけた公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\omega, t) e^{-it\rho} dt = \hat{f}(\rho\omega) \quad (8)$$

がある. 従って左辺の逆フーリエ変換を計算すれば元の f が再構成できる. この式はトモグラフィの現場の人たちに “投影切断定理” と呼ばれて重用されてきたが, 反転アルゴリズムとしてはそれほど効率の良いものではない. この式はトモグラフィとはあまり関係のない, 確率分布の断面分布からその全体像を構成するという問題で, Cramér-Wold により 1936 年に既に得られている.

これらと全く異なった系統に, 球関数展開

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(n,\ell)} f_{\ell k}(|x|) Y_{\ell k}(x/|x|), \quad g(\omega, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(n,\ell)} g_{\ell k}(t) Y_{\ell k}(\omega) \quad (9)$$

を用いた公式

$$f_{\ell k}(r) = \frac{(-1)^{n-1}}{2\pi^{n/2}} \frac{\Gamma((n-2)/2)}{\Gamma(n-2)} r^{2-n} \int_r^{\infty} (t^2 - r^2)^{(n-3)/2} C_{\ell}^{(n-2)/2} \left(\frac{t}{r} \right) g_{\ell k}^{(n-1)}(t) dt \quad (10)$$

がある. ここに $Y_{\ell k}$ は ℓ 次の球関数で, その個数を $N(n, \ell)$ とした. C_{ℓ}^{λ} はゲーゲンバウアーの多項式と呼ばれる, $[-1, 1]$ 上の測度 $(1-t^2)^{(\lambda-1)/2} dt$ に関する直交多項式系である. これは $n=2$ のときに Cormack (1964) が与えたものを Deans (1979) が一般次元に拡張したものであり, $n=2$ のときは球関数は三角関数, ゲーゲンバウアーの多項式はチェビシエフの多項式となって, より初等的になる.

数学的なラドンの反転公式の歴史については, ノーベル賞をもらったコーマックが [13] で詳しく調べている. 別に自分だけがノーベル賞をもらって後ろめたかったと言う訳でも無かるうが, なかなか面白い事実を丹念に掘り起こしており, 一読に値する.

§2. 非適切問題

上で得られた公式をそのまま数値計算したら CT 像が出来上がるのであれば, これらの公式を導いた人たちが大いにノーベル賞に対する権利を主張できたであろうが, 事態は残念ながらそう簡単では無い. それはラドン変換の逆がいわゆる非適切問題の代表例となっているからである. このことは, 前節で紹介した反転公式がいずれも微分操作を含んでおり, 微分は “連続でない演算” の代表例であることから想像されることであるが, より厳密には, これらの公式を用いて証明できる Sobolev 評価

$$c(s, n) \|f\|_{H^s(\mathbf{R}^n)} \leq \|Rf\|_{H^{s+(n-1)/2}(Z)} \leq C(s, n) \|f\|_{H^s(\mathbf{R}^n)}, \quad \text{supp } f \subset \{|x| \leq R\} \text{ のとき}^9$$

⁸以下, f のフーリエ変換を \hat{f} , $\mathcal{F}f$ などで表す.

⁹supp f は f の台, すなわちその外で f が恒等的に 0 であるような最小の閉集合を表す.

から、逆変換の $L_2(Z \cap \{|t| \leq R\}) \rightarrow L_2(\mathbf{R}^n)$ での不連続性とその非適切性の度合いが正確にわかる¹⁰. (実用的には L_2 ノルムよりも上限ノルムを用いるべきであろうが、理論的な簡明さのために L_2 で代用することは数値解析で一般に行われていることではある.)

ここで“非適切問題”について簡単に解説しておこう. そもそもこの言葉は適切な問題に対するアンチテーゼとして生まれたものであるから、まずは適切性の話から始めるのが自然であろう. 実はこのシンポジウムでのお話を承ったとき、杉浦先生のご希望は 20 世紀における偏微分方程式の発展を振り返るということであったようだが、そんな大それたことは小生には荷が重すぎるので、むりやり最近勉強しているこの CT の話に変更させて頂いたという経緯があるので、償いという訳ではないが、ほんの少し偏微分方程式の話をしてしよう.

20 世紀の偏微分方程式論の始祖がアダマールであることは、ほぼ専門家の意見が一致するところであろうが、その根拠は、彼が偏微分方程式の問題設定における適切性の概念を導入したことによる. 偏微分方程式の初期値問題を考えるとき、コーシー-コワレフスキーの定理によれば、データが解析関数である限り解は存在する. しかし、波動方程式のときにはこの解がそのまま物理的に意味のある解と結びつくのに対して、ラプラス方程式の場合には、初期値問題

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & \text{on } \mathbf{R}^2, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \psi(x) \end{cases} \quad (11)$$

は物理的意味を持たない. それは例えば、

$$\varphi(x) = \varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon}, \quad \psi(x) = 0 \quad \text{に対する解} \quad u(x, y) = \varepsilon \sin \frac{x}{\varepsilon} \cosh \frac{y}{\varepsilon}$$

に見られるように¹¹, 初期値は非常に小さくても、解はいくらでも大きくなりうるからである. (この例は特殊すぎると思われるかもしれないが、実はこの方程式の場合、集合論的に云って微小初期値のほとんどがこんな具合に増大する解をもたらすのである.) 現場の観測あるいは設定には誤差は付き物だから、もしもこのような解析的問題を必要とする物理現象があったとすると、実験の度に初期データに上のような微小誤差が混入するという不幸な状況では、結果は予期し得ず、あたかも解の一意性すら無いように見えるであろう. アダマールは、データに対して解が連続に依存するような問題設定のみが意味を持つと考え、数学的な偏微分方程式論もまた、そのような“適切な”問題を追求すべきであるとした. 20 世紀における偏微分方程式論の主要な流れは、アダマールのこの考えに基づいてひたすら適切性を追求してきたと言ってもほぼ間違いではなからう.

しかしながら数学の可能性はまた自然界の多様性と同じく、はなはだ広い. 世の中ではラプラス方程式の初期値問題も飛行機の翼付近に生ずる境界層の記述などに現れるし、強い平滑化のために逆には戻れないはずの熱方程式を、時間を遡って解くことが制御理論などで必要となる. このような“非適切問題”は偏微分方程式論の正当な“順問題”に対して、未知量と既知量を入れ替えた“逆問題”を考えるとほとんど常に生ずるものである. そこでこのような非適切問題を解くということの数学的な意味を抽象的に確立しようという試みが 1960 年代に始まった. その中心はチホノフ (1963) であるが、実は物理学者のフィリップス¹²も独立に同様の考えを提出していたことが後で知られ、今日ではこれをチホノフ-フィリップスの正則化の理論と呼ぶことが多い.

今、 X, Y を二つの可算ヒルベルト空間¹³とし、 $T: X \rightarrow Y$ をそれらの間に働く一対一の連続な線型写像とする. これが全射なら、有名なバナッハの開写像定理により、逆 T^{-1} もまた連続となってしまおうが、

¹⁰一般に $\|f\|_{L_2(\mathbf{R}^n)} = (\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 dx)^{1/2}$ を L_2 ノルムといい、 $\|f\|_{H^s(\mathbf{R}^n)} = \|(1 + |\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi)\|_{L_2(\mathbf{R}^n)}$ を Sobolev ノルムという. 後者は s が正整数のときは f の s 階以下の各導関数の L_2 ノルムの和と同等である. $L_2(\mathbf{R}^n), H^s(\mathbf{R}^n)$ は、それぞれこれらのノルムが意味を持つすべての (超) 関数が成す空間である.

¹¹ $\cosh x = (e^x + e^{-x})/2$

¹²D. L. Phillips 1962 (有名な解析学者の R. S. Phillips とは別人)

¹³通常のユークリッド空間 \mathbf{R}^n と正規直交基底 e_1, \dots, e_n から $n \rightarrow \infty$ として得られる空間. $L_2(\mathbf{R}^n)$ 等がこれと同型になる.

T の像 $T(X)$ が Y で稠密な部分集合のときには、 $T^{-1} : T(X) \rightarrow X$ は連続ではなくなる。それにも拘わらず T^{-1} を計算しようというのが非適切問題の最も単純なモデルである。今、 X, Y それぞれの正規直交基底 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}, \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ をうまく選んで、これらにより $Tf_k = \sigma_k g_k, \sigma_k > 0$ と、 T が対角化されるとしよう。すなわち、

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, f_k) f_k \quad \Longrightarrow \quad g = Tf = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (f, f_k) g_k$$

これを T の特異値分解と呼び、自己共役作用素（エルミート演算子） T^*T の X 上でのスペクトル分解を用いて構成することができる。 T^{-1} が連続でないことは、 $\sigma_k \rightarrow 0$ という事実反映される。さて $g \in T(X)$ なら、もちろん

$$f = T^{-1}g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} (g, g_k) f_k$$

であるが、 g の測定値に微小な誤差が含まれると、その再構成像 f への影響は因子 $1/\sigma_k$ のせいでいくらでも大きくなりうる。よってこのままでは信頼すべき再構成像は得られない。

ここで、どうせ近似計算をしているのだからと開き直って、

$$f = \sum_{k=1}^N (f, f_k) f_k$$

とってしまう。そうすれば

$$T_N^{-1}g = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sigma_k} (g, g_k) f_k$$

は、もちろん連続な写像となる。問題は g がこれに近い測定値 g' で取り替えられたとき上の式が $f = T^{-1}g$ の近似値を与えるかどうかであるが、

$$\|T^{-1}g - T_N^{-1}g'\| \leq \|T^{-1}g - T_N^{-1}g\| + \|T_N^{-1}g - T_N^{-1}g'\|$$

ここで右辺の第一項

$$\|T^{-1}g - T_N^{-1}g\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k} (g, g_k) f_k \right\| = \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} (f, f_k) f_k \right\| = \varepsilon_N$$

は、 $N \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づく。また第二項は $c_N = \max_{1 \leq k \leq N} 1/\sigma_k$ と置けば、 $\leq c_N \|g - g'\|$ となる。よってまず $\varepsilon_N \leq \varepsilon/2$ となるように N を十分大きく選び、次にこの N に対して $\|g - g'\| \leq \varepsilon/2c_N$ の精度で g' を測定すれば、 $f' = T_N^{-1}g'$ は $\|f - f'\| \leq \varepsilon$ を満たすであろう。

以上に説明したのは正則化の一種で、いわゆる高周波フィルターの考え方であるが、チホノフ-フィリップスの正則化はこれよりはやや複雑で、正則化パラメータ $\alpha > 0$ というものを導入して

$$T_{\alpha}^{-1}g := (T + \alpha)^{-1}g = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sigma_k + \alpha} (g, g_k) f_k$$

を近似再構成像とするものである。基底展開から見ると複雑なようだが、これは、

$$J(f) := \|Tf - g\|^2 + \alpha \|f\|^2$$

という汎関数を最小にするような f にも対応しており、数値計算にはなかなか都合がよい。

さて、上の理論は完璧なようで実は純粋数学的には致命的な穴がある。それは $f = T^{-1}g$ が不明な段階で ε_N を評価できるかというクレームである。抽象的にはこれに答えるすべは無いが、個々の具体的な問題においては、予め N をどれくらいに選べばよいかを経験により、あるいは試行錯誤で、あるいは他の情

報から理論的に、推測できるので、アルゴリズムは実用になるのである。純粋数学者にはいささか気味の悪い説明であろうが、実際にやってみれば少なくとも闇雲にすべての展開項を用いて数学の公式通りに計算するよりはるかに実用的なことがわかる。例えば、画像処理の多くの問題におけるように基底展開がフーリエ級数で得られているときなどは、リーマン - ルベグ型の定理から想像されるように、原像 f の滑らかさだけで ε_N の評価は十分可能である。普段、純粋数学をやっていると、我々は急減少関数に対して誤ったイメージを持ちやすい。次図の例ははなはだ初等的ではあるが、 C^2 級の関数のフーリエ展開係数の漸近評価 $O(n^{-2})$ が実用的には如何に急減少かを示すには十分であろう。同時に $O(n^{-1})$ は実用上も遅い減衰であることがこの図から読みとれる。序でに言えば、指数減少の関数などは実用的見地からはもう完全に台が有界な関数なのであり、超関数論の教科書に出てくる不自然な C_0^∞ 級関数の方が台の端で急激に落ちている分かえって始末が悪いくらいである。

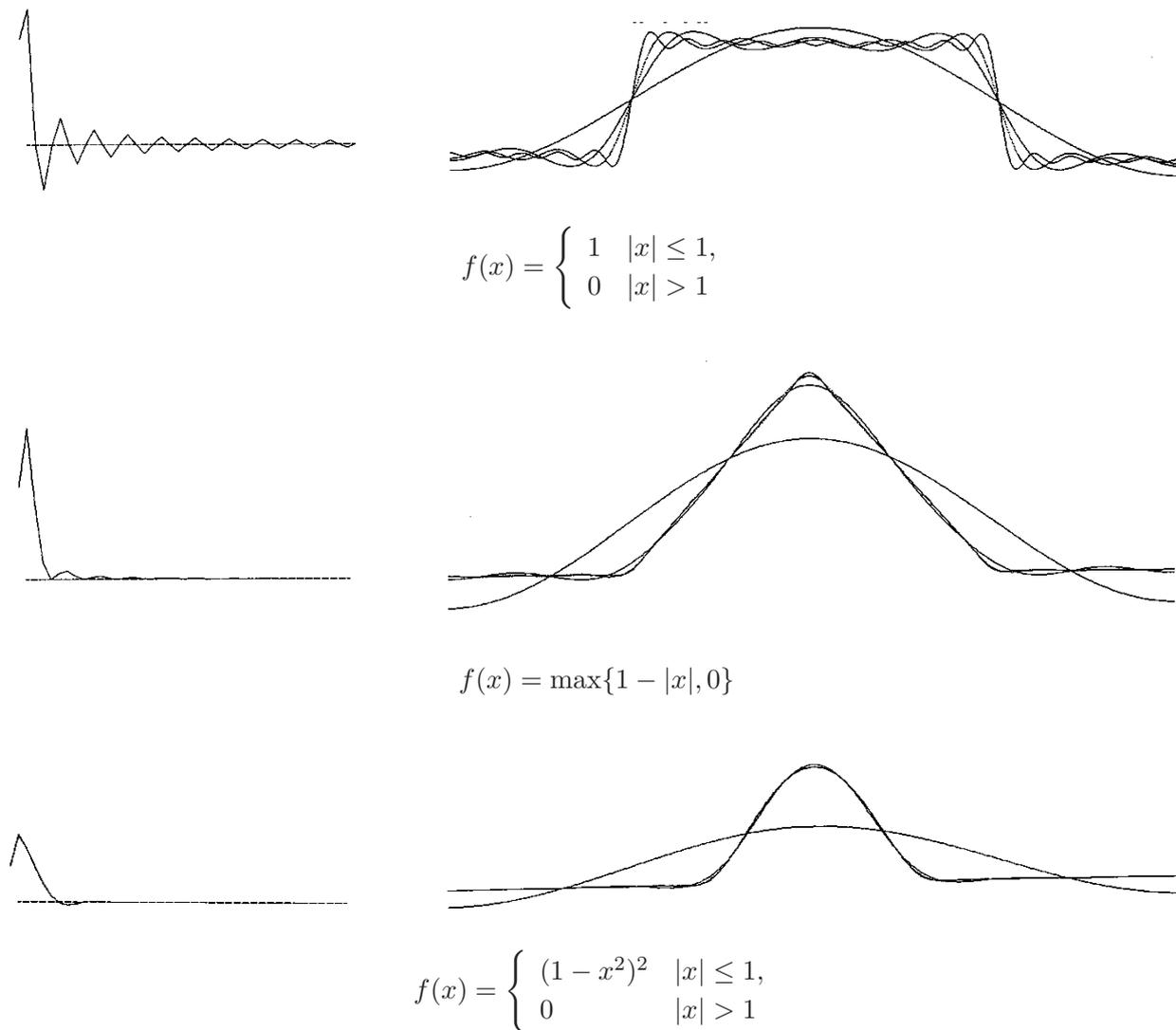


図 4 基本的な関数のフーリエ展開係数の減少度

(係数のグラフは $0 \leq n \leq 40$, 部分和のグラフは $n = 1, 5, 10, 20$ に対するもの)

§3. 離散的一意性

反転公式があるくらいであるから、ラドン変換の一意性、すなわち “ $Rf = 0$ なら $f = 0$ ” は自明に成立する。もっとも、これは反転公式が意味をもつような関数、あるいは超関数のクラスの中での話であって、ラドン変換が常識的な意味で定義できるというだけでは必ずしも成立しない。実際、Zalcman (1982) が、 \mathbf{R}^2 上の連続

関数 $f \neq 0$ で、勝手な直線上で絶対積分可能、かつ f 自身の線積分は常に 0 に等しいようなものを提出した。これなどはフビニの定理の叙述で、“ $f(x, y)$ が x につき絶対積分可能、かつ f の絶対値の x に関する積分が残りの変数 y について積分可能” というところをうっかり、 f の x に関する積分がとやってしまうとんでもないことになるという例にもなっており、数学科の学生には教訓的であろう。もちろん、上のような f は \mathbf{R}^2 上積分可能ではない。 $L_1(\mathbf{R}^2)$ の元に対しては一意性が成り立つことは反転公式のいずれか、例えば投影切断定理を用いれば容易に確かめられる。

応用上は台が有界な関数しか扱われないから、ラドン変換の数学的な一意性には何の問題も無いが、実用的な CT の理論においては、測定される方向は有限個である、ということから問題が生ずる。実はそのみならず、測定に用いられる直線自身が有限個しか無いわけであるが、それは方向を一つ決めたときのこの方向に垂直な直線による線積分のデータ、いわゆるこの方向への“投影像”である一変数関数の離散近似の話になり、それも以下の議論に含まれるので、ここでは無視しよう。そこで今、測定に用いられる方向が

$$\omega_1, \dots, \omega_N$$

であったとすれば、これらに垂直なベクトル $\omega_1^\perp, \dots, \omega_N^\perp$ を一組選んで

$$f(x) = \left[\prod_{j=1}^N \omega_j^\perp \cdot \nabla_x \right] g(x) \quad (12)$$

の形の関数を考えると、これらは必ず直線 $\xi = \rho \omega_j$, $\rho \in \mathbf{R}$ の上で $\hat{f} = (\prod_{j=1}^N \omega_j^\perp \cdot i\xi) \hat{g}(\xi) = 0$ となり、従って投影切断定理により $f(\omega_j, t) \equiv 0$, $j = 1, \dots, N$ となる。つまり、この測定ではこれらの関数は 0 と区別できない。

伝統的な分野で生活している純粋数学者なら、ここで、こんな問題はインチキだと言い出すかもしれないが、これはこれでなかなか面白い数学的内容を含んでいるのである。一意性の反例 (12) を調べてみると、これらは高周波成分を無視できない大きさで含んでいることが分かる。我々は既に前節において非適切性の観点から、実際の測定においては高周波成分を無視しなければ有意な結論を期待することはできないことを知ったので、離散化の非一意性が高周波領域だけに現れるならそれほど困惑する必要はない。このことは以下のように情報理論の標本定理により保証されるのである。

まず、厳密に周波数領域の限定された関数、すなわち $\text{supp} \hat{f}(\xi) \subset \{|\xi| \leq b\}$ であるような $f(x)$ を考える。これを b -帯域限定関数と呼ぶ。シャノン¹⁴の標本定理によれば、このような関数は

$$h \leq \pi/b \quad (13)$$

の刻み幅で離散的に観測すれば完全に決定される：

$$f(x) = Sf(x) := \sum_k f(hk) \text{sinc} \frac{\pi}{h}(x - hk) \quad (14)$$

ここに

$$\text{sinc} x := \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{ix\xi} d\xi$$

はホイッターのカーディナルサインと呼ばれる関数で、わざわざ記号を与えるほどのこともないようなものであるが画像処理などでは良く出てくる。式 (14) 自身は \hat{f} を台の外へ周期関数として延長したものとみなしてフーリエ級数展開すれば容易に得られるものであるが、その意味するところはなかなか深遠である。すなわち、(14) 式は、帯域（周波数領域）が b に制限された測定では高々 $2h \leq 2\pi/b$ の大きさの細部（ディテール）しか見えないということである。言い方を変えれば、 $2h$ の大きさの細部を表現するには、周波数領域を $b \geq \pi/h$ にとらねばならない。（それに応じて前節で述べた非適切性の処理もそれだけきつくな

¹⁴Shannon

る.) (13) はナイクイスト¹⁵の条件という名で知られている。その本質は量子力学の不確定性原理と同じである。

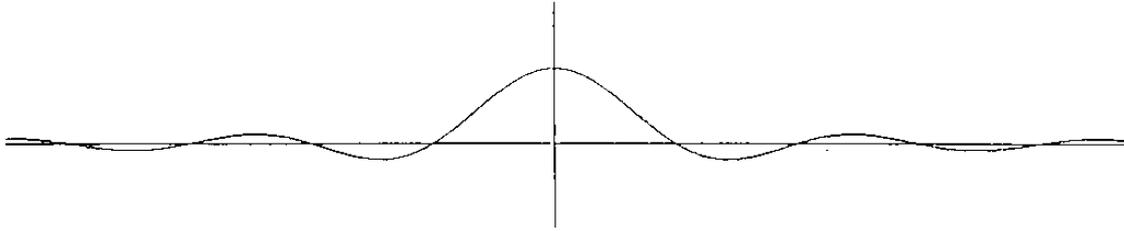


図 5 sinc 関数のグラフ

ただし (14) 式は、これを再構成公式として見ると重大な欠陥がある。それは $\text{sinc } x$ の減少の遅さである。実際には我々はこの式を f も有界な台を持つような場合に適用する訳だが、無限和をいきなりぶったぎったのでは生ずる誤差が大きすぎる。実は h を条件 (13) の限界より少し小さくとれば、級数の減少度を急減少にまで改良できることが知られている。あるいはそこまでしなくとも、 $\chi_{[-\pi/h, \pi/h]^n}$ を適当な B -スプライン関数で置き換えれば減少度がそれなりに改良されるが、ここでは深入りしないことにしよう。それよりも、実際の応用では、関数 f の方が有界な台を持ち、従って帯域限定は近似にすぎないから、その誤差がどう現れるかを見る方が重要であるが、これについては、ポアソンの和公式を用いて

$$(S_h f - \hat{f}) = (\chi_{[-\pi/h, \pi/h]^n} - 1)\hat{f} + \chi_{[-\pi/h, \pi/h]^n} \sum_{\ell \neq 0} \hat{f}\left(\xi - \frac{2\pi\ell}{h}\right) \quad (15)$$

が示され、これから逆フーリエ変換により、台が $[-\pi/h, \pi/h]^n$ と交わらないような関数 $\chi_x(\xi)$ で、 $|\chi_x(\xi)| \leq 1$ なるものが存在して

$$Sf(x) - f(x) = \frac{2}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} \chi_x(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

という式が成り立つことが示される。これより、

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus [-\pi/h, \pi/h]^n} |\hat{f}(\xi)| d\xi < \varepsilon \quad \implies \quad |Sf(x) - f(x)| < \frac{2}{(2\pi)^n} \varepsilon$$

従って、もし更に $f(hk) = 0, k \in \mathbf{Z}$ ならば $|f(x)| < 2(2\pi)^{-n}\varepsilon$ と、ほぼ満足すべき結論が得られる。以上の議論を f の代わりに \hat{f} に適用すると、CT の離散化の近似的一意性について、測定に用いる方向 $\omega_j, 1 \leq j \leq N$ を m 次以下の球面調和関数が決定できるくらいに沢山用いれば、展開式 (9) により

$$Rf(\omega_j, t) = 0, \quad \implies \quad \int_{|\xi| \leq \vartheta m} |\hat{f}(\xi)| d\xi \leq \eta(\vartheta, m) \|f\|_{L_1(\mathbf{R}^n)}$$

となることが示される。ここに $\eta(\vartheta, m)$ は m とともに指数減少する量であり、 $0 < \vartheta < 1$ はパラメータである。こうして CT の離散化の計算の妥当性が数学的にも保証されるのである。

しかし実際には再構成画像に入り込んだ誤差の影響を見分けるのはより微妙である。たとえ大きさが ε 以下でも、非常に特徴のある図形が画像に含まれていると、それは結構目立ってしまい、本当にそのようなパターンが存在するかどうか気になる。特に、医療機械の場合には、目的の病変自身が小さな淡いパターンであることが多いので、事態はより深刻である。式 (15) を見ると、離散化に伴う誤差は、周波数領域で二つの項より成り、第一項は高周波領域に現れ、こちらは誤差の影響を深刻に受ける部分であるが、再構成時に離散化のメッシュ h より細かいものを観察しないようにすれば無視できる。第二項の方は観察に関わる比較的大きなディテールとして現れるが、こちらは f が真に帯域制限された関数なら存在するはずの無い項であり、一般の関数でも理論的には離散的標本値を取る前に帯域制限しておけば見ずに済むが、実

¹⁵Nyquist

地の応用ではそんなわけには行かない．現実には存在しないが処理の過程で混入してしまうパターンは一般に“アーティファクト”と呼ばれ，ここで問題としているものは離散化に伴うアーティファクトである．このようなものは処理方法に特有の形状をしていることが多く，実用機械では経験を積んだ操作者には判別できるようなのである．どんなアーティファクトが現れうるかを数学的に研究している人も居る．Palamodov [49] などを見られたい．

§4. 数値的再構成アルゴリズム

以上に述べてきたように，CT の離散化と数値計算は，例えば楕円型方程式の境界値問題のように適切な問題のそれとはずいぶん様相が異なる．ハウズフィールドは [33] で，“当時数学的な方法で利用できそうなものはどれも理想化されすぎていて役には立たなかった．私は常識的な（と信じたい）実用的方法で画像の再構成を行ったのだ”と述べている．文献が無かったというのは事実ではないにしても，当時としては，そう言われるのは仕方がないくらい，主流の数値解析からかけ離れたものであったことは間違いなからう．ここでは代表的な二つのアルゴリズムを紹介する．もう一度強調しておくが，ラドンの反転公式をそのまま離散化しても決して良い結果は得られない．

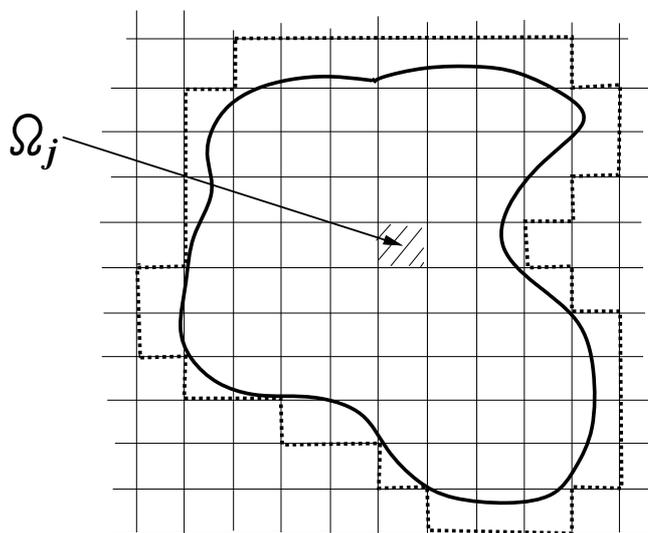


図 6 ピクセル分解

代数的再構成法 第一のものは ART と略称される代数的再構成法 (algebraic reconstruction technique) である．(わざわざ“代数的”という形容詞がついているのは歴史の偶然で，この方法だけが特に代数的という訳ではない．) これは，対象物を正方形などの網目 $\{\Omega_j\}_{j=1}^N$ で覆い，その各要素 Ω_j ，いわゆる画素 (pixel=picture element) では物体の密度 $f(x)$ は定数 c_j に等しいとみなす．数学的には

$$f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_j(x) \quad (16)$$

という近似をすることになる．ここに χ_j は第 j 画素の集合 Ω_j の定義関数，すなわち，この集合の上で値 1 を，その外で値 0 をとる関数である．これに応じて観測に用いる直線も $L_i, i = 1, \dots, M$ と，有限個を用意する．上の近似関数に対し第 i 直線 L_i に沿う線積分を厳密に計算すれば

$$\int_{L_i} \sum_{j=1}^N c_j \chi_j(x) dx = \sum_{j=1}^N c_j \text{length}(L_i \cap \Omega_j)$$

となる．定数 $a_{ij} = \text{length}(L_i \cap \Omega_j)$ は個々の観測とは独立に，予め計算しておける量である．よって

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} c_j = g_i, \quad i = 1, \dots, M \quad (17)$$

という連立一次方程式が得られた．

数値解析では大抵，最後は行列の計算になるので，これは正統派の問題のように思われるかもしれないが，実は上の連立方程式は，例えば楕円型境界値問題の離散化で現れるもののように，係数行列 A が一般には正方ですらなく，データ数をそろえて正方行列にしたところで逆行列が存在するわけでもない．また非零成分は非常に少ないものの，その分布がでたらめで行列全体に拡がっている．CT を発明したハウズフィールドも以上の離散化法にはすぐ行き着いたものの，さて方程式 (17) を解く段になっているいろいろ数学の文献を調べたが役に立つものは見つけることができず，結局単純な反復法で解いたようである．彼は自分のアルゴリズムをきちんと記述していないので，詳細は不明だが，Natterer に聞いたところでは，以下に述べるような方法を自分で発見したらしい．

実は，この手の方程式が数学でかつて扱われたことがなかったというのは間違いで，夙に第二次大戦前のポーランドで Kaczmarz(1937) という人が次のような方法を与えている．今，行列 A の第 i 行 (a_{i1}, \dots, a_{iN}) を \vec{R}_i と置く．超平面 $H_i : \vec{R}_i \cdot \vec{x} = g_i$ への直交射影を P_i とし初期近似解 (initial guess) \vec{x}_0 から出発して H_i への直交射影をとる操作を繰り返す．一回の射影では，公式

$$P_i \vec{x} = \vec{x} + \frac{g_i - \vec{R}_i \cdot \vec{x}}{\vec{R}_i \cdot \vec{R}_i} \vec{R}_i$$

で行き先が計算できることは，簡単な初等幾何学的考察でわかるから， $P = P_M P_{M-1} \dots P_1$ を一回の反復過程とみなし，初期値 \vec{x}_0 から出発して $\vec{x}_k = P \vec{x}_{k-1}$ により次々と近似を上げて行く．誤差のない純粋数学の世界では，これが (17) の一つの解（実はノルム最小の解）に収束することが証明されるのであるが，実用的には適当なところで止めておいた方がかえって良い像が得られる．パソコンでの実験なら 4 回も反復すれば十分である．もっとも一回の反復過程は M 回の直交射影の計算を含んでいることに注意されたい．また，加速法と云って，適当なパラメータ $0 < \omega < 2$ を導入し，直交射影 P_j 自身の代わりに

$$P_j^\omega := (1 - \omega)I + \omega P_j$$

を用いた方が速く収束することが多い．パラメータ ω の選び方は大抵は試行錯誤による．

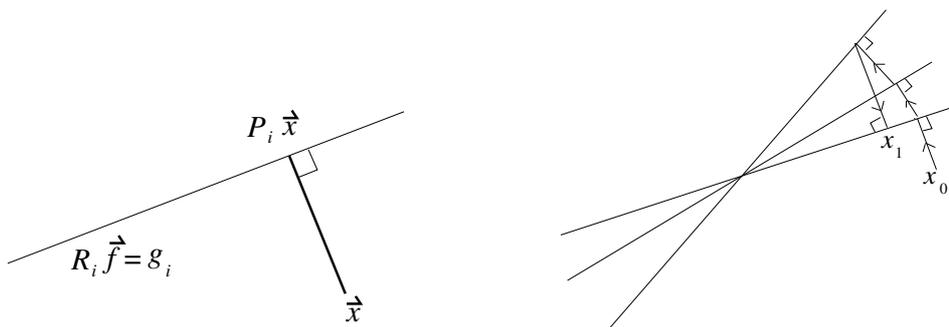


図 7 ART の原理の説明図

アルゴリズムが分かったら，お手持ちのパソコンで実験してみたいくなる人も居られよう．そこで，以上のアルゴリズムを実行する際に注意すべき点を二三述べておこう．直線が正方形により切り取られる部分の長さ $\text{length}(L_i \cap \Omega_j)$ の計算は，プログラミングの練習問題には最適である．しかしこうして得られた行列は， M, N が大きいと巨大な寸法になる．(二次元の画像のため， M, N 自身がそれぞれサイズの 2 乗で増大する量だから．) 反復のためにこれを記憶しておいて使うのは，小さな計算機には重い負担となるが，実は

a_{ij} の計算はほとんど瞬時にできるので、これをサブルーチンにしておき、反復計算において必要となる度に係数 a_{ij} をその場で計算し直しても十分実用的な速さで処理できるのである。実験のためには“ファントム”と呼ばれる、脳のシミュレーションモデルをまず用意する。これは脳の断面図に似せた平面図形を、密度に擬した値を持ったいくつかの部品を合成として作成したもので、Shepp-Logan のファントムなどが特に有名である (図 8)。次にパラメータづけられた有限個の直線の族を定めて、これらに対する上の図形の密度関数の線積分を数値積分などで計算する。設定を現実に近づけるためには、得られた数値に乱数を用いて小さな誤差を混入させるとなお良い。こうして CT 実験のシミュレーションデータが得られる。これに上のアルゴリズムを適用して再構成画像を得、元の画像と比較すれば、どの程度正確に再構成がなされたかを知ることができる。

いずれにしてもある程度細かい画像を作成するには、仮想記憶をサポートしたコンパイラが必要である。といっても高価なものが必要という訳ではない。パソコン用の unix に付属している gcc や f77, あるいは MS-DOS 上で DOS エクステンダーを用いる gnu のパソコン版である DJGPP に含まれている同様の処理系が利用できるので、あまり古くないパソコンなら誰でも実験可能である。医療用 CT のアルゴリズムとしては ART はもはや次に述べるフィルター付き逆投影法にとって代わられてしまったが、考え方が簡明で、新しい問題に対処する柔軟性もあるので、研究者の間では今でも良く用いられている。実際に実験してみても始めに想像されるよりは速いことが分かるであろう。

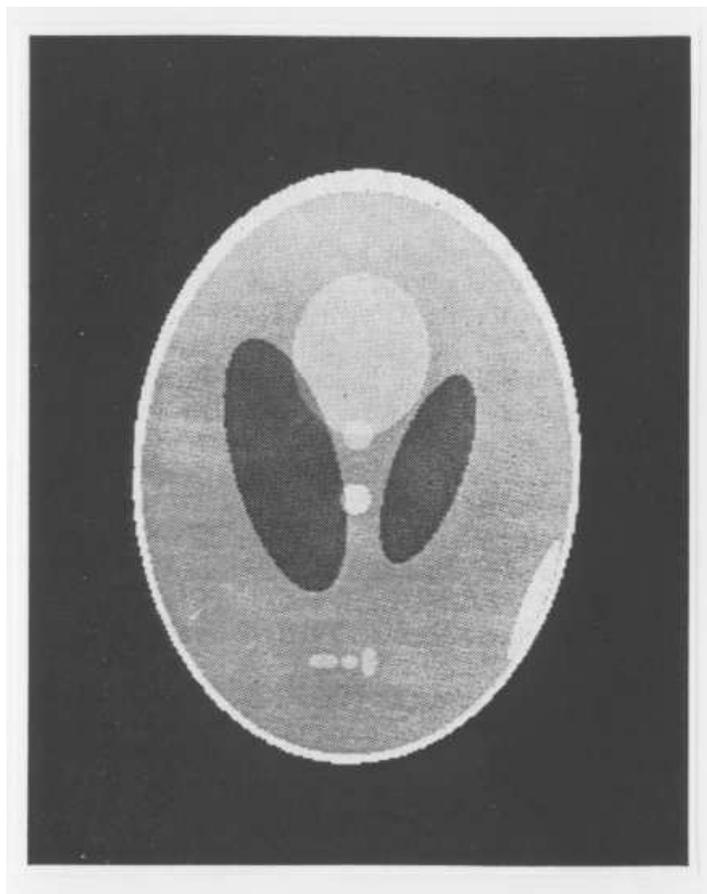


図 8a Shepp-Logan のファントム [55]

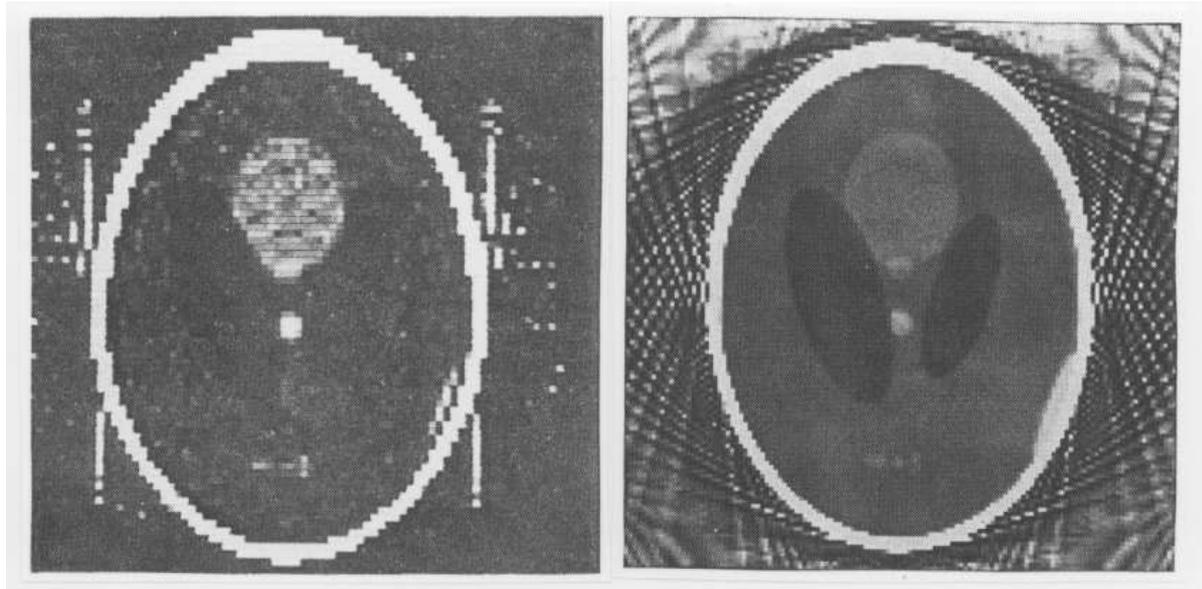


図 8b 同上のハウズフィールドの反復法（左）及び Shepp-Logan のフィルター付き逆投影法（右）による再構成図 [55]（いずれも 180×160 本のデータを用いている．左の方は ART を用いればもっと改良される．）

フィルター付き逆投影法 現行の機械のほとんどが用いているこの方法は、実はハウズフィールドの自動機械のためではなく、伝統的な手計算による逆投影法、すなわち有限個の投影データから元の像を再構成するためのアルゴリズムとして、Bracewell-Riddle(1967), Ramachandran-Lakshminarayanan(1971)により提案された．医療用 CT への応用は Shepp-Logan(1974)により提唱されて以来、実用に共されている．これは (7) 式の二次元版である

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \widehat{Rf}(\vec{\theta}, \rho) e^{i\rho t} |\rho| d\rho d\theta \quad (18)$$

を用いるものである．ここで $\vec{\theta} = (\cos \theta, \sin \theta)$ と略記した．また \widehat{Rf} は Rf の一変数 t に関するフーリエ変換である．ここで §1 に掲げた公式を引用してしまうのは興ざめであろうから、話の興味を繋ぐため、当座必要な $n = 2$ の場合に限って、この式を導いておこう．フーリエの反転公式を極座標で表した式

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \widehat{f}(\rho\vec{\theta}) e^{i\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)} \rho d\rho d\theta$$

において、 $(\rho, \pi + \theta) = (-\rho, \theta)$ という対称性に注意して $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ に対する積分を書き直せば

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(\rho\vec{\theta}) e^{i\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)} |\rho| d\rho d\theta$$

となる．他方、フーリエ変換の計算を、一つの固定した θ について

$$t = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad s = x \sin \theta - y \cos \theta$$

という直交座標で計算すれば

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\rho\vec{\theta}) &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) e^{-i\rho(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) e^{-i\rho t} ds dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty Rf(\vec{\theta}, t) e^{-i\rho t} dt = \widehat{Rf}(\vec{\theta}, \rho) \end{aligned}$$

を得る（投影切断定理の 2 次元版）．これを上に代入すれば (18) が得られる．

さて，今，形式的に $\widehat{\phi}(\rho) = |\rho|$ により一変数関数 $\phi(q)$ を定めると，(18) を積 $\widehat{Rf} \cdot \widehat{\phi}$ の一変数逆フーリエ変換と見て

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [Rf *_t \phi](\vec{\theta}, t) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi d\theta \int_{-\infty}^\infty Rf(\vec{\theta}, q) \phi(t - q) dq \end{aligned} \quad (19)$$

実は残念ながら， $\phi(q)$ は超関数 $-\frac{1}{\pi} \text{f.p.} \frac{1}{q^2}$ となってしまう，このままでは数値計算に適さない．しかし実際の f は高周波部分が無視できるものとして，非適切問題の正則化のときと同じ要領で $\widehat{\phi}$ の高周波部分をカットする．例えば最初に Ramachandran 達がやったようにぼっさり切り落とせば，

$$\widehat{\phi}(\rho) = \begin{cases} |\rho|, & |\rho| \leq K \text{ のとき} \\ 0 & |\rho| \geq K \text{ のとき} \end{cases}$$

このとき

$$\phi(q) = \frac{K^2}{\pi} \text{sinc} Kq - \frac{K^2}{2\pi} \text{sinc}^2 \frac{Kq}{2} \quad (20)$$

となる． \widehat{f} が $|\rho| \geq K$ で十分小さければこれでも良い近似式となるであろう．

残念ながら，上の $\phi(q)$ は sinc 関数のせいで減少度が悪く，畳み込み (19) の計算には相当速くの方までのデータを必要とする．これでは計算量はそう減らないので， $\phi(q)$ をもう少し速く減少するもので取り替えることを試みよう． $|\rho| \leq K$ において $|\rho|$ を近似する関数ならば何でも良いのだから

$$\widehat{\phi}(\rho) = \begin{cases} \frac{2K}{\pi} \left| \sin \frac{\pi\rho}{2K} \right|, & |\rho| \leq 2K \text{ のとき} \\ 0 & |\rho| \geq 2K \text{ のとき} \end{cases}$$

ととってみよう (Shepp-Logan 1974)．この逆フーリエ変換も具体的に計算できて

$$\phi(q) = \frac{1}{\pi} \frac{1 + \cos 2Kq}{\frac{\pi^2}{4K^2} - q^2}$$

となる．今度は連続に切り落とされたので $\widehat{\phi}$ は先の関数より一回余分に微分できることが反映して，遠方での減少度が $O(1/q^2)$ となっている¹⁶．よって実用的には，畳み込み (19) の離散化版の計算には数項程度を用いるだけで十分である．更に，cos 関数を計算する代わりに，格子点での ϕ の値

$$\phi(ka) = -\frac{8}{\pi a^2} \frac{1}{4k^2 - 1}, \quad k \in \mathbf{Z} \quad \left(a = \frac{\pi}{K} \right)$$

の線型補間で置き換えたもので ϕ の代用とすれば，結果はそれほど損なわずに速度の著しい向上をはかることができる．こうして

$$f(x, y) = \frac{a}{2N} \sum_{j=1}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} Rf(\vec{\theta}_j, ka) \phi(x \cos \theta_j + y \sin \theta_j - ka) \quad (21)$$

が得られる．

¹⁶実は Shepp-Logan は始め，この関数を $|\rho| \leq K$ にぼっさり切り落としたものをフィルターとして提案しており，それだと逆フーリエ変換はやはり $O(1/q)$ でしか減少しない．しかし彼等は値が $O(1/q^2)$ となるような格子点を巧みに選び出して結局は以下と同等な式に到達した．

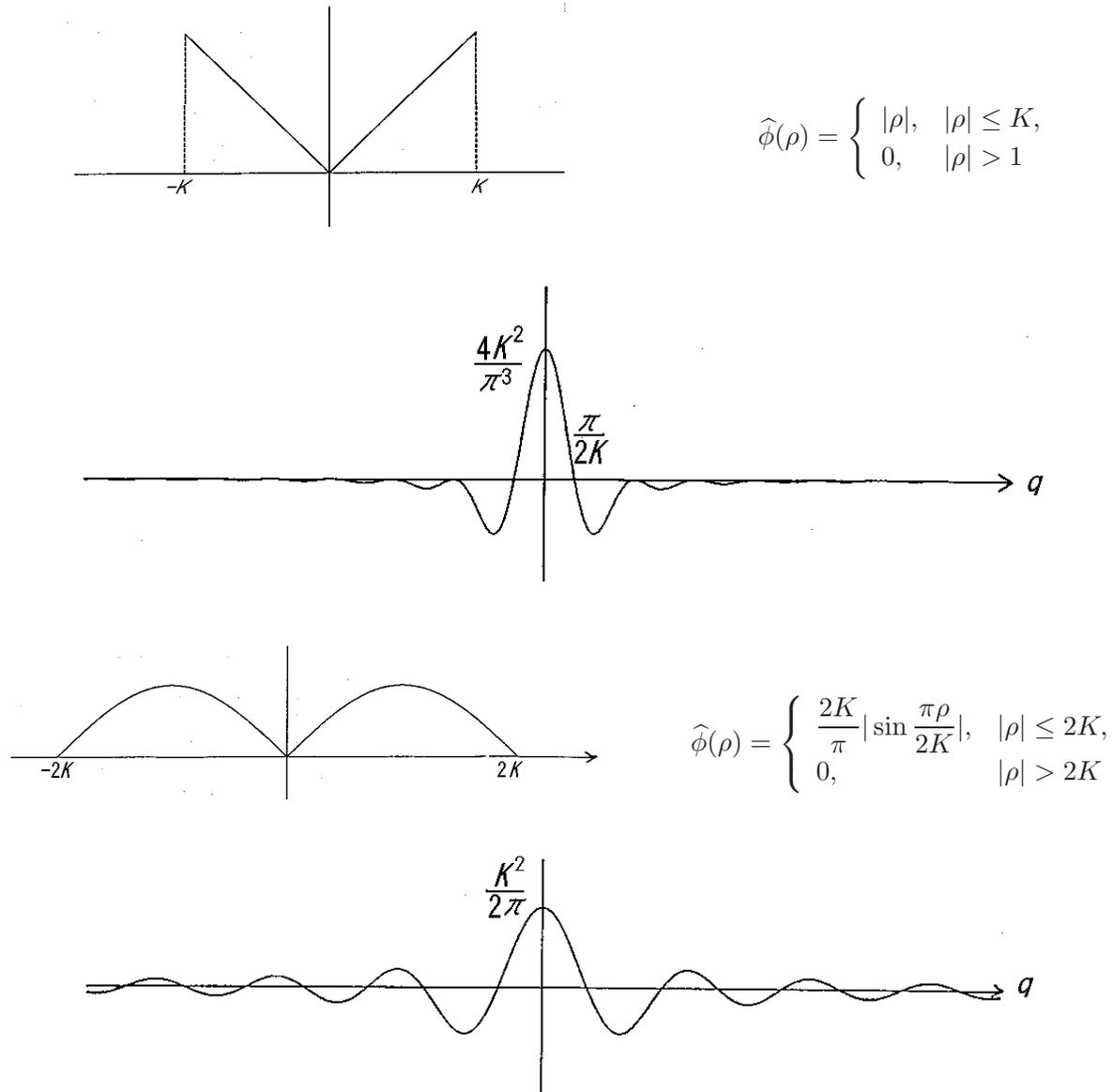


図9 フィルター関数とそのフーリエ逆像のグラフ

この方法もパソコンで容易に実験できるので試してみると良い。名前の“逆投影法”の由来は、 ω_j 方向の投影像である $Rf(\omega_j, t)$ という一変数関数達から元の関数を再構成するということから来ている。比較的少ない方向についてハウズフィールドの CT 機械以前から存在していた概念である。“フィルター”とは、公式 (19) の関数 $|\rho|$ を高周波カットした近似関数で置き換えることから来ている¹⁷。この方法はまた、畳み込み法とも呼ばれるが、こちらの名称の由来は公式の形からして明らかであろう。

§5. CT の歴史

CT は英語の computed tomography あるいは computerized tomography の頭文字である。tomography はギリシャ語の“slice”を意味する $\tau\omicron\mu\omicron\sigma$ と graphy とでできている。computed も computerized も、意味は説明の必要は無かろう。前者の用語が伝統的で、後者は最近のものである。どちらでも似たようなも

¹⁷応用方面の人達の間では元々の $|\rho|$ もフィルターの一つのように扱われているが、これは元来の公式に含まれていたものであって、厳密に云えばカットに使われる $[-K, K]$ の定義関数等だけがフィルターなのである。現場の人達のこの用語法は 2 次元フーリエ変換を忘れて単なる 1 次元フーリエ変換と比較してのニュアンスであるが、便利な言い方なので我々もこれに従っておく。

のではあるが、厳密に云うと、後で注意するように両者には重大な違いがある。

人体の断面を切らずに見たいという要求は早くからあった。最初の X 線断層撮影の原理は夙に 1921 年、フランスの A.E.M. Bocage により提起されたもので、図のように X 線源と写真乾板を同調して平行移動あるいは回転させることにより現像すると、特定の部位の断面だけが乾板上にいつも一定の像を結び、他の部位はぼけてしまうので、相対的に前者が観測できるという考えであった。この方法で撮影した脳の断面と、同じものの CT による像が図 11 に比較してある。(CT の方は今となってはやや古いものであるが、それでも違いは歴然であろう。むしろ上のような方法でもこれだけの断面像が得られていたことに感嘆するくらいである。)

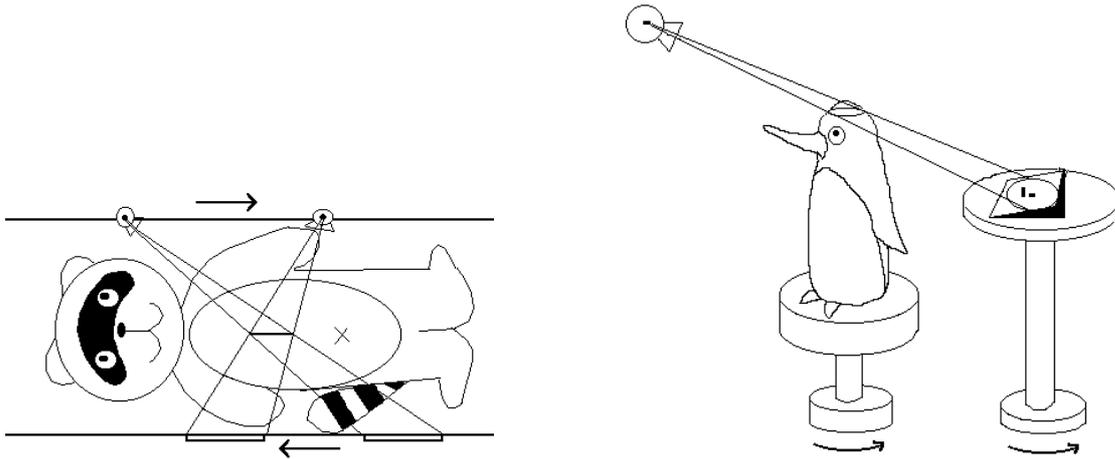


図 10 Bocage の断層撮影法の原理 ([31] の挿絵を翻案したもの)

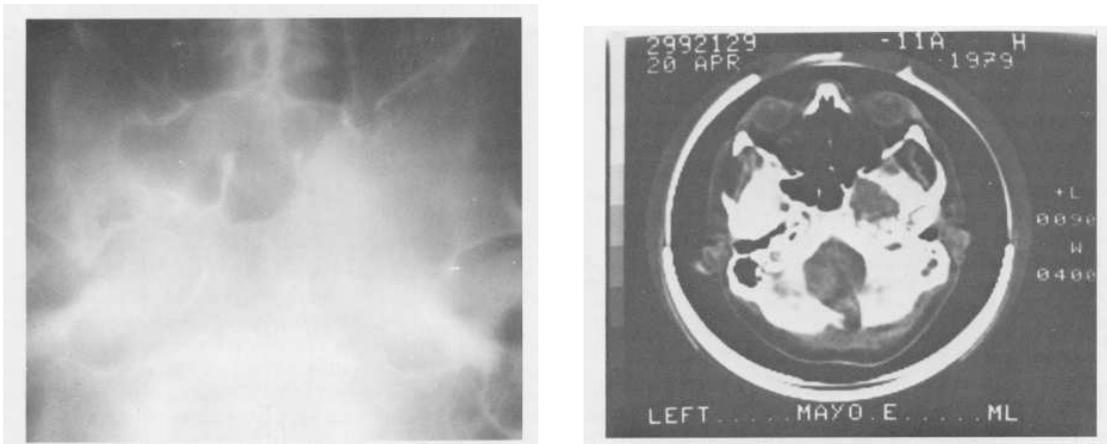


図 11 Bocage の方法を用いた頭部の断面図 (左) と CT によるそれ (右) との比較 ([31] による)

ラドン変換の純粋数学的な歴史については、“ラドンの問題の定式化は、平面と球面の差はあるものの、Funk(1913)の方が早かった”等、いろいろ面白い話題も有るようだが、あまり深入りしないことにしよう。(吉沢先生の記事を見られたい。) CT に直接関わる文献はハウズフィールド以前にも興味深いものがいくつか現れている。特に、Ambarzumian(1935)はラドンの仕事を知らずに、それとそっくりな反転公式を与え、[2](1936)ではそれを離散化したものを用いて、銀河の中心部から来る光のスペクトル偏奇の観測から、ある種の星の地球から見た動径速度の分布密度を手計算した。図 12 がその結果の一部である。これなどは computed tomography の最初の結果と云えるだろう。(先にラドンの公式は数値計算の役に立たないと云ったが、解像度の低い再構成なら微分を積分よりも先に行うこととし、それを差分で置き換えるといった程

度のアルゴリズムでも一応は実用になる。)

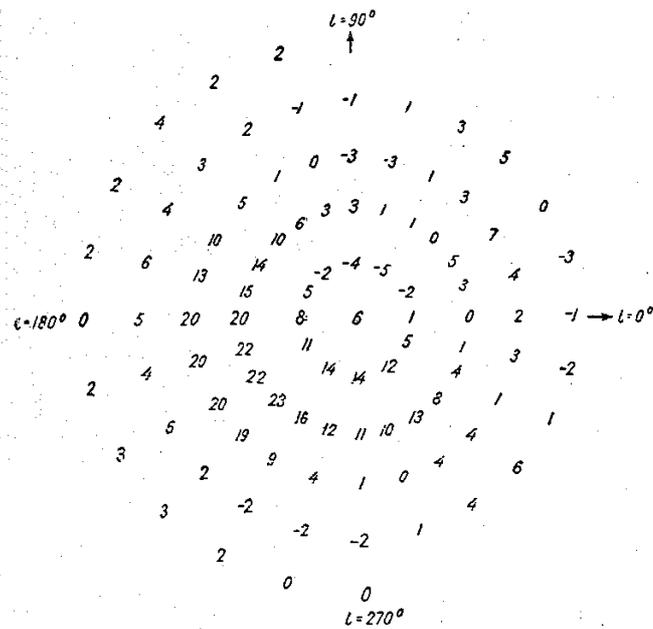


図 12 Ambarzumian [2] による B 型星の動径速度分布図

1956 年には、Bracewell による電波天文学での再構成アルゴリズムの記念碑的な研究が出た。医学におけるトモグラフィの研究は 1940 年代にポーランド人による先駆的な研究があったようだが、本格的な研究はコーマックによるものが最初である。もっとも、コーマックの研究は、本人の書いたもの [12] によれば 1956 年頃から始まったらしいが、発表されたのは 1963, 1964 で、その意味では医学への応用の論文としては Oldendorf(1961) が最初である。彼は逆投影法と同等なアルゴリズムを用いているが flying spot の特定法を示しているのであって再構成画像全体の作成法を論じているのではないところがやや弱い。また Kuhl-Edwards(1963) もエミッショントモグラフィの形でコーマックの論文とほぼ同時期に CT の医学への応用を提案しており、数学的とは云いがたいが再構成の方法も論じている。

1955 年にコーマックは南アフリカのケープタウン大学で物理学の講師をしていた。当時の南アフリカの法律では、放射性アイソトープを扱う病院には特定の資格を持った物理の専門家を監督に置くことが義務づけられていたが、たまたまケープタウンの Groote Schuur 病院の物理学者が辞めて、この町でただ一人の核物理学の専門家であった彼に急遽この仕事が回って来たことが、CT 研究のきっかけとなった。ここでは、放射線療法の際に局部に照射する線の強度制御のための資料として、人体組織の吸収率による放射線の強度分布図を作成しながら照射療法を行っていたが、コーマックはこれを眺めているうちに、この方法は診断にも役立つのではないかと思いついた。彼はまずそのようなアイデアが既に研究されているかをしつこく調べたのであるが、何も見つからず、最初から考えることになった。こうして“線積分の値から元の関数を再構成する”というラドンの数学的問題に行き当たったのであるが、ここで彼はまた、このようにすっきりした数学的問題は 19 世紀までに数学者が当然答を出しているはずだと思い、いろいろ文献などを探したが、それらしいものを見つけることはできなかった。そこで彼はこの問題に純粋数学的な興味をかき立てられ、自分で解決しようと思いついたのである。

彼が見いだした反転公式はフーリエ展開を用いたもの (10) で、ラドンのそれとは全く異なるものであった。まず [10](1963) では、もとの関数が動径 r のみの関数の場合を扱い、古典的なアーベルの積分方程式に帰着させて答を得た。次に [11](1964) では、これを一般の場合に拡張し、各フーリエ展開係数毎にアーベル型積分方程式を解いて、チェビシエフ多項式を用いた再構成公式を得ることができた。いかにも物理学者好みの解答であった。彼は物理学者らしく、自分の得た公式の有効性を示すために、アルミ板と木でできた円盤を作り、これにガンマ線を当てて透過線の強度を各方向で測定し、自分の公式を用いて再構成

画像を計算したものを論文に添付している。特に、最初に行った実験では、盤の中心付近において再構成データの方にアルミ板の密度の異常が現れたが、密度一様な板を購入したと信じていたコーマックはしばらく悩んだ末、購入先に照会して、実は中心付近の密度が小さくしてあったことを知り、大いに愉快であった、という手柄話を [12] に記している。

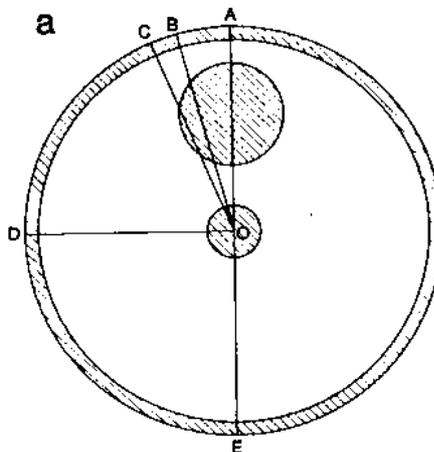
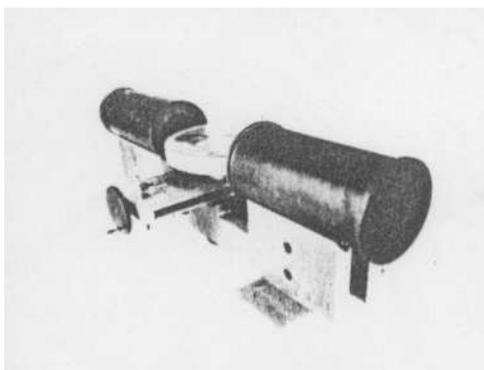


図 13a コーマックの実験機械と実験に用いた盤の図 [12]

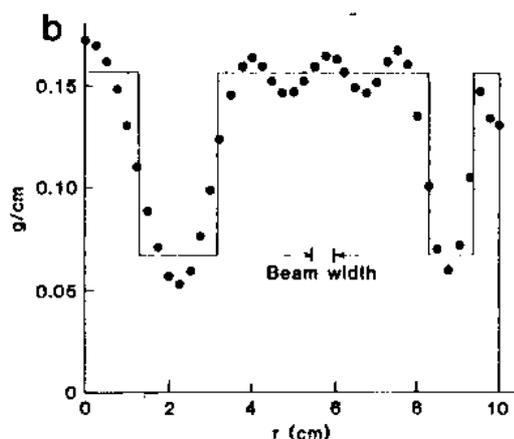


図 13b 同上の コーマックによる再構成データ

このコーマックの仕事を元にしてハウズフィールドの機械ができたのであれば、二人のノーベル賞受賞は当然であるが、実は話はそう簡単ではない。ハウズフィールドはコーマックの仕事に気付かなかったのである。また、もし気付いていたとしてもラドンの仕事と同様、ハウズフィールドの役には立たなかったであろう。というのは、コーマックの与えた再構成公式も、あまり安定性の良いものではなく、彼が実験に用いた程度の解像度ならともかく、医療用の CT のような細かいメッシュでの再構成に利用しようとすると、非適切性の影響で再構成画像の信頼性がなくなってしまうことが後で明らかとなったからである。事実は、前に述べたようにハウズフィールドは自分で ART 型の反復解法を用いて、離散化されたラドン変換を反転したのである。

ハウズフィールドの用いた逆投影法の考え方自身は、彼以前に X 線解析を用いる物理などの分野で、また医療の分野でも既に用いられていた。すなわち、いくつかの方向からの X 線像を、そのまま現像する

のではなく、

透過 X 線の強度分布 \rightleftharpoons 密度関数の投影像

として記録し、それらから、主にフーリエ変換（投影切断定理）を用いて再構成画像を計算していた。この計算法のアルゴリズムの改良案として ART は Gordon-Bender-Herman(1970) により、フィルター付き逆投影法でさえ Bracewell-Riddle(1967), Ramachandran-Lakshminarayanan(1971) と、いずれもハウズフィールド以前に提出されていたものである。こうしてみるとハウズフィールドの寄与はいったい何だったのかと思えてくるが、実は彼が試作した機械は、それまでの逆投影法とは質的に異なる大量の方向・直線の標本数を用いており、この大量データの処理を、観測データの取り込みから再構成画像の計算と結果の表示まで、計算機を用いた一貫作業とすることにより可能ならしめたという点に最大のポイントがある。まさに、CT を “computed tomography” から “computerized tomography” に変えたのが、彼の功績なのである。量の変化は質の変化をもたらすと、誰か偉い人が言っていたが、実際にもハウズフィールド以後、CT の有用性は疑い得ないものとなって今日に至っていることは周知の通りである。図 15 にハウズフィールドが最初にセットした Atkinson Morley 病院での CT 装置一式の写真があるが、本稿の最初に掲げた最新の設備と比較してみても、個々の機械の技術的進歩はさておき、装置全体としての概念にはほとんど変わったところはないことが良くわかり、これも彼の業績を暗示していると云えるだろう。

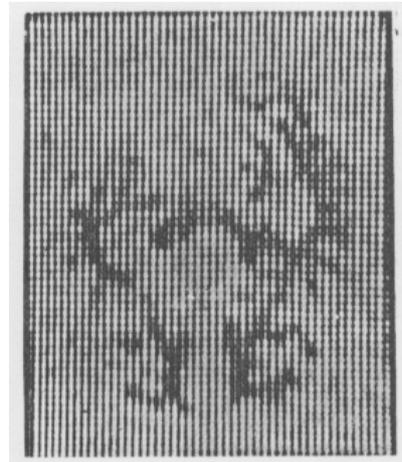
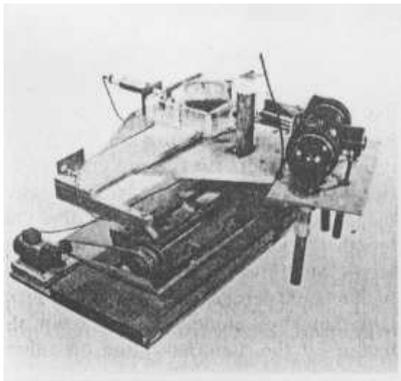


図 14 ハウズフィールドの 実験機械とブタの脳の標本による再構成実験の結果 [34]

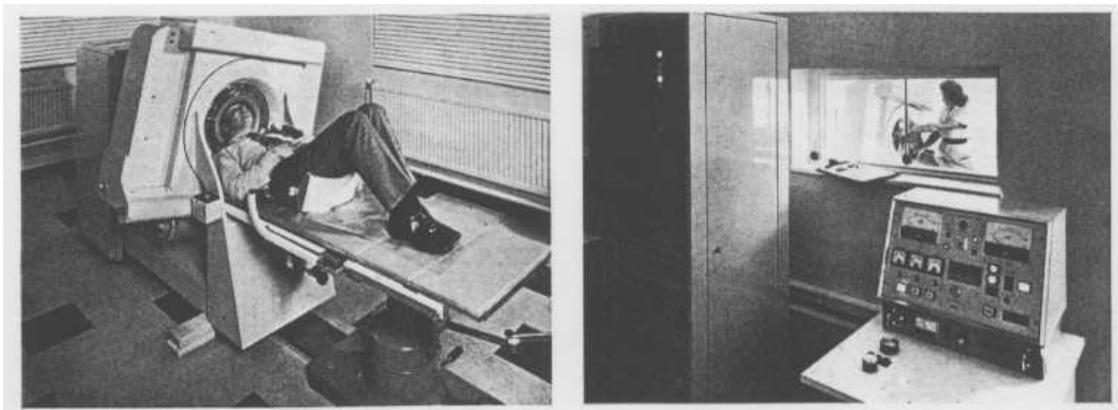


図 15a ハウズフィールドの 設計による最初の医療用 CT 装置 [33]

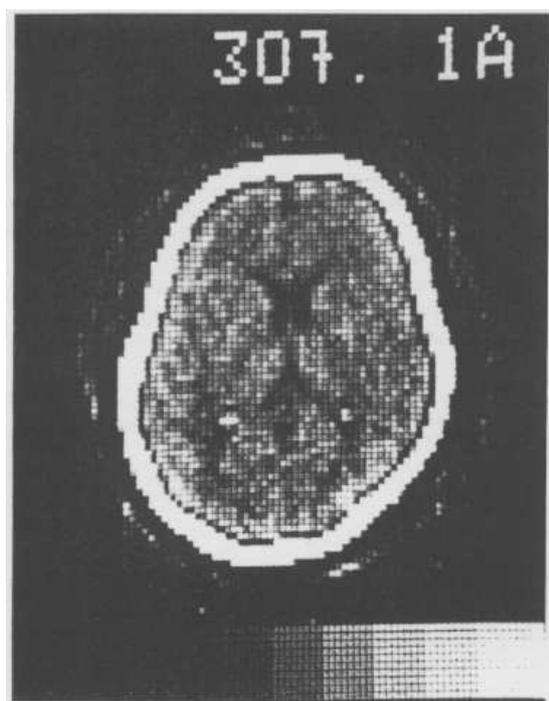


図 15b 同上を用いて得られた生きた人間の脳の CT 像 [3]

CT のその後については、照射ジオメトリの改良が重要である。ハウズフィールドが作った機械では図 16 の (a) のように線源と検知器の成す直線を定まった刻み幅でまず平行移動し、次いで方向を少しずつ変えて再びこれを繰り返す、という、いわゆるパラレルビーム型のスキャンをしていた。最初の機械では一セットのスキャンに 4～5 分を要したという。その後、線源から扇状に出る X 線をそのまま利用して、これを円弧状に並んだ複数の検知器で一度に観測し、方向を変えてこれを繰り返すという、いわゆるファンビーム型のスキャン方法 (図 16 の (b)) が導入されてスキャン時間が著しく短縮された。この二つは標本となる直線の配置が全体としてもやや異なるため、数値解析的にも少し違いがある (離散誤差の計算などが少し複雑になる) が、数学としての本質にはそれほど違いはない。ファンビームスキャンの医療用 CT への応用は Shepp-Logan(1974) により提唱されたが、この理論自身は電波天文学のトムグラフィで Bracewell 以来、既に用いられていた。もともと電波天文学では、線源は遠方に固定された電波源であり、ファンビーム型の方が自然である。更に、検知器も地球上、あるいはせいぜいロケットの届く限りの地球の近傍に制限されていて、いわゆる制限データのトムグラフィの典型例となっている。

CT の技術的進歩としては、この他に X 線をラジオ波に変えた NMR (核磁気共鳴) の原理を用いた MRI (磁気共鳴画像) の導入が挙げられる。NMR の原理は、磁場中に置かれた水素原子などの磁気モーメントを持つ原子核が歳差運動を起こし、それがこの運動の周期に合った電磁波を選択吸収することを利用したものであり、1946 年に E.M. Purcell と F. Bloch の二人が独立に発見したものであるが、実は 1944 年の E.K. Zavoiskii が最初だと云うことである。Lauterbur(1973) が磁場に線型勾配をかけることにより情報の取り出しが容易になることを見出してから実用化が本格化し、80 年代に入って CT にも応用され始めた。X 線と異なり被爆の副作用が無く、また改良によって解像度も X 線 CT に引けを取らなくなってきたので、医療的には非常に優れているが、現在でも装置の価格が X 線 CT の 10 倍ほどする。装置自身の形状は CT を一回り大きくしたような感じである。また、体内に注射した放射性物質からの放射光を記録する PET (陽電子放射トムグラフィ) も早くから用いられているが、これは数学的には X 線 CT とあまり変わらない。この他、最近では音波トムグラフィやレーザー光トムグラフィの研究も進んでおり、非線型の ART など、いろいろ面白い数学的問題を与えている。

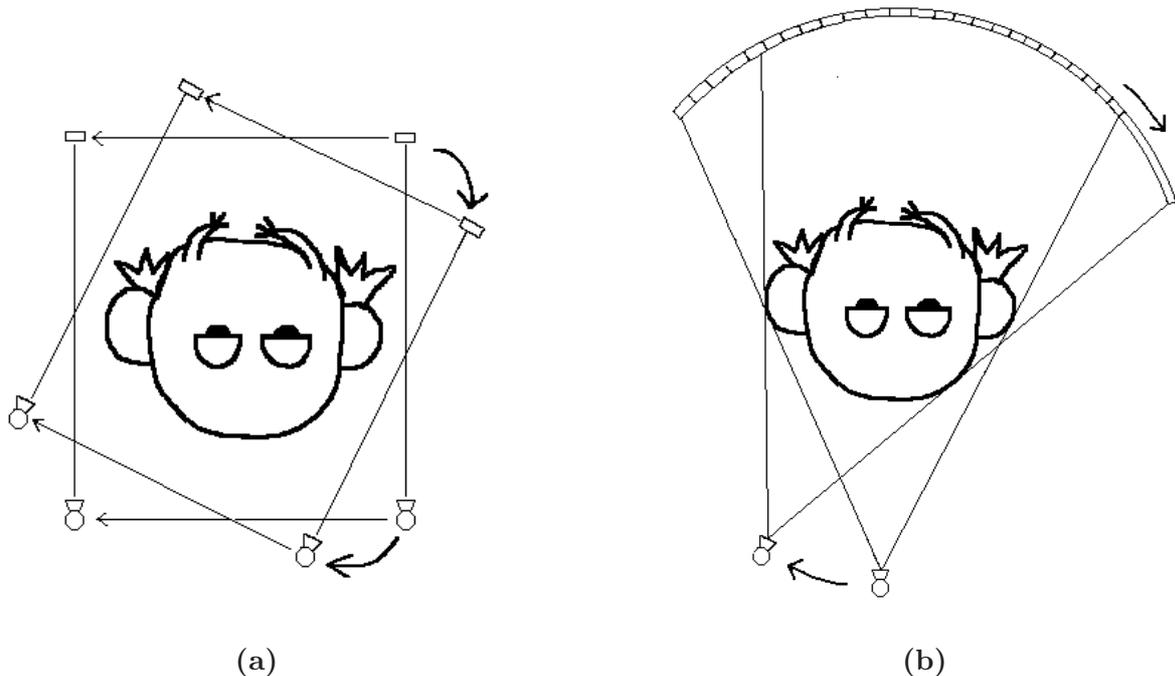


図 16 パラレルスキャンとファンビームスキャン ([31] の説明図を翻案したもの)

制限データのトモグラフィについては，電波天文学の他にも，観測窓を少ししか開けられないトカマク炉でプラズマの状態を解析したり，地震波の到達時間を元に地下の密度分布を再構成するといった分野でも重要な，ホットなテーマである．数学的には制限データトモグラフィは非常に強い非適切性を示す（ちょうど正則関数の解析接続を数値計算するような感じになる）ので数学的には不可能に近い問題であるが，個々の具体的問題については，極端に意地悪でなければ（解像度をあまり上げないようにしなければ）何とか実用的に処理できるといったところである．

最後に述べた地震波のトモグラフィは，今まで述べてきた CT とは異なり，波が伝わる経路すら地下の密度が分って後に初めて定まる最短経路（測地線）であることから，数学的には非線型の非常に難しい問題となり，まだあまり解明されていない．実際の地下には，反射や時間的遅延を起こす断層などもあり，かつ幾何光学的近似だけでは済まない回折などの影響もあって，更に複雑である．現場の人たちは，これを仮想経路を用いた反復法や，最も平凡な解を選ぶと云った統計的手法を用いて，それなりに実用的な（我々から見ると驚くほどきれいな）再構成図を作成している．

以上では二次元の CT についてしか話さなかったが，三次元 CT もまだおおむね研究段階である．平行平面の族による二次元トモグラムのセットを用いれば一応の三次元描像が得られるので，通常の CT に対して実用に共するにはそれなりの利点が必要とされるであろうが，例えば心臓の機能検査など，三次元的な同期映像が必要とされる場では重要であり，X 線の錐状ビーム照射や MRI のように一度に多次元のデータが取れる装置と組み合わせての実用化が進んでいる．三次元の X 線変換の反転は，数学的には非適切性はラドン変換のそれよりも弱く，Sobolev の示度で $1/2$ だが，実用的にはかえって安定性が悪く，なかなか大変である．数学的には最低どの程度のデータが必要とされるかを Orlov 1974, Tuy 1983 が示している．

最後に CT に関連した純粋数学的研究を少しだけ紹介しておこう．一つは Gelfand 学派や Helgason らによる，対称空間などへの一般化と，表現論への応用である．非ユークリッド空間への一般化についてはラドンの原論文にも書いてある．またコーマックも“純粋数学的な興味から”，原点を通る円の族に関するラドンの問題を後に取り扱っている．

次にこれを超局所化した Guillemin, Beylkin, Denishuk, Greenleaf-Uhlmann らの仕事がある．超局所解析など CT と何の関係が有るのかと思われるかもしれないが，Quinto(1993) が示したように，制限データのトモグラフィでは，物体の密度の不連続面に平行な直線族が観測から欠けていると，この不連続面は忠実

には再構成できない，といったことが波面集合 (wavefront-set) の理論を用いて説明できるのである．もっともこんなことは現場の人たちにはどうの昔に知られていたに違いない．純粋数学としては，Helgason が示した，“ $Rf(\omega, t)$ が凸コンパクト集合 K と交わらないすべての超平面について $0 \neq \text{supp} f \subset K$ ” という，いわゆる台定理に対して，大前提の“ f が急減少”という条件がなぜ必要かが明快に分るような形で Boman [6], [7] が超局所解析的な証明を与えているのも面白いが，これも現場ではそう役には立たないだろう．(台定理自身は，外部問題といって，凸状の障害物の外側を通る X 線しか観測できないような再構成問題に対して解の数学的な一意性を保証するという意味で重要である．ただしこれも実用的には非適切性の問題が深刻となる.)

役に立たないついでに，密度一様な物体の形をなるべく少ない観測方向から決定するという，幾何学的な研究が一部の人たちにより精力的に行われていることを紹介しておこう．一般的な平面凸図形については，三方向あれば十分であり，二方向の場合には，凸と限らぬ一般の平面図形について，一意に定まるための必要十分条件も知られている．これらは Gardner により“幾何学的トモグラフィ”と名付けられて教科書まで現れた．

CT の歴史を見ると知識の伝承がうまくゆかなくて再発見されたことが実に多いことに驚かされる．これは，少なくとも初期の段階ではラドン変換やトモグラフィがそれぞれの学問領域においてマイナーな話題であったことにもよるだろうし，また個々の事実の中にはそれほど難しいことでは無く，調べるよりも新たに考える方が手取り早いというものもあったかもしれない．ハウズフィールド，コーマックの二人とも“何か文献が有るだろうと思って探したが見つからなかったので自分で考えた”とほぼ同じようなことを云っている．二人の近くにいた数学者が博識でなかったとは云うまい．ただ数学者は世の中では“易しい数学ほど役に立つ”ことにもう少し留意して宣伝に務めるべきではあろう．コーマックは純粋数学の文献を，ハウズフィールドは応用数学あるいは物理の文献を探したであろうから，宣伝不足という点ではどちらも同罪である．ハウズフィールドの傍にいた者が適切な数学的助言を与えていれば，一緒にノーベル賞をもらえた可能性は有る．

さて，そこで結論として，数学者がノーベル賞をとるための処方箋は？ まず論文の序に自分の理論が役に立つということを想像しうるあらゆる用途に関して吹聴する．場合によっては可能性の検証は工学者に任せても良いだろう．(アメリカの特許にはその手のアイデアだけのものがやたらと多いとも聞く．) ただし自分で実験機械が計算機シミュレーションができる人は，もっともらしい実験結果をつけ加えたとお良い．昔 F 先生が講演の折りに，“自分の理論が何か工学などの具体的な問題に応用できるのだ，と云うと，アメリカでは聴衆は感心してくれるが，日本では聴衆は胡散臭そうな目で見る”，と云われたことがあったが，今はさすがにそんなことはあるまい．でも上述のようなことをしたら，肝心の論文が数学の雑誌には載らなくなって，結局首尾良くノーベル賞をもらえたとしても，それは数学者としてでは無かったということになってしまうことは有りそうな話ではある.¹⁸

冗談はこのくらいにしてそろそろ締めくくろう．コーマックがノーベル賞をもらえたのは，あるいは幸運のせいかもしれないが，彼は著作の中で繰り返して，“自分の研究は医学の問題を解くためというよりも，数学の面白い問題を解くという点に推進の主要な動機があった”と述べている．つまり自分は純粋数学者として振る舞ったのだと言っている．あたかもこちらの“ノーベル賞の取り方”という視点をあざ笑うかのようではないか．そこで結論としては，聊か最初の意図とは異なるが，“数学者はノーベル賞など取るべきではない”ということにしたい．

既に何度も述べたように，ラドンの与えた反転公式は CT に何の寄与もしていないので，ラドンは生きていてもノーベル賞をもらえたかどうかは定かではないが，それにも拘わらずラドンは CT 学界で非常に尊敬されているのである．それは 1976 年に創刊された 計算機トモグラフィの雑誌 (Journal of Computer Assisted Tomography) の表紙のデザインにラドンのオリジナル反転公式を図案化したものが採用されたことが象徴的に物語っている．実はこれが純粋数学の在るべき姿ではないだろうか？ 純粋数学者は何でも用意しておくが，諸々の世俗的な成果は悠然と他の実学の諸分野に譲る．世の中は決してこのような態度の

¹⁸鹿野健先生より，純粋数学者でノーベル賞をもらった人は(経済学以外にも)存在するのご指摘を受けた．雑誌“Science”のいずれかの号にその手記が載っているということである．また数学者とノーベル賞の関係を論じた最近の記事として [42] がある．

純粋数学が減びることを望まないだろうし、そのまま平和に共存することを歓迎するだろう。近頃、特に応用数学者と思しき人たちの中に、評論等で純粋数学者の在り方に批判めいたことを書く人が居るが、純粋数学者をあまり攻撃して純粋数学者の世俗性を呼び覚まさない方が平和共存のためには好ましいのではないかと私は思う。純粋数学者が講義を難しくやるのは、予算をもらえない腹いせをしているのではなくて、全く純粋な動機からなのであるから、いじめるよりもおだてて上手に利用する方が絶対に得策である。

参考文献

- [1] Ambarzumian V. : On the derivation of the frequency function of space velocities of the stars from the observed radial velocities, *M.N.R.A.S.* **96** (1935), 172–180.
- [2] Ambarzumian V. : On the distribution of space velocities of *B* and *F* type stars, *Publ. de L'obs. Astron. Leningrad* **7** (1936), 21–35.
- [3] Ambrose J.: Computerized transverse axial scanning (tomography): Part II. Clinical application, *British J. Radiology* **46** (1973), 1023–1047.
- [4] Atsarkin V.A., Skrotskii G.V., Soroko L.M. & Fedin E.I.: NMR introscopy, *Uspekhi Phys. Nauk* **135** (1981), 285–315 (= *Soviet Physics – Uspekhi* **24** (1981), 841–859).
- [5] Beylkin G. : The inversion problem and applications of the generalized Radon transform, *Comm. Pure Appl. Math.* **37** (1984), 579–599.
- [6] Boman J. : Helgason's support theorem for Radon transforms – A new proof and a generalization, in *Mathematical Methods in Tomography*, Lecture Notes in Math. Springer **1497** (1991), 1–5.
- [7] Boman J. : A local vanishing theorem for distributions, *C. R. Acad. Sci. Paris* **315** (1992), 1231–1234.
- [8] Bracewell R.N. : Strip integration in radio astronomy, *Australian J. Phys.* **9** (1956), 198–217.
- [9] Bracewell R.N. & Riddle A.C.: Inversion of fan-beam scans in radio astronomy, *Astro. Phys. J.* **150** (1967), 427–434.
- [10] Cormack A. M.: Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications, *J. Appl. Physics* **34** (1963), 2722–2727.
- [11] Cormack A. M.: Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications II, *J. Appl. Physics* **35** (1964), 2908–2912.
- [12] Cormack A. M.: Early two-dimensional reconstruction and recent topics stemming from it, *Nobel Lecture, Science* **209** (1980), 1482–1486.
- [13] Cormack A. M.: Computed tomography: some history and recent developments, *Proc. Symp. in Appl. Math.* **27** (1982), 35–42.
- [14] Cramér & Wold H.: Some theorems on distribution functions, *J. London Math. Soc.* **11** (1936), 290–294
- [15] Deans S. R. : Gegenbauer transforms via the Radon transform, *SIAM J. Math. Anal.* **10** (1979), 577–585.
- [16] Deans S. R. : *The Radon Transform and Some of its Applications*, John Wiley & Sons, 1983.
- [17] Denishuk A.S. : Study on integral geometry in real space (in Russian) *Dissertation*, Moscow University, 1990.
- [18] Funk P.: Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien, *Math. Ann.* **74** (1913), 278–300.
- [19] Funk P.: Über eine geometrische Anwendung der Abelschen Integralgleichung, *Math. Ann.* **77** (1916), 129–135.
- [20] Gardner R.J.: Geometric tomography, *Notices of AMS* **42** (1995), 422–429.
- [21] Gardner R.J.: *Geometric Tomography*, Cambridge University Press, 1995.
- [22] Gelfand I.M., Graev M.I. & Vilenkin N.Ja. : *Generalized Functions*, Vol.5, Academic Press, 1966.
- [23] Gelfand I.M. & Shilov G.E. : *Generalized Functions and Operations on them*, FIZMATGIS, Moscow, 1959 (邦訳『超関数論入門 I,II』, 共立全書) .
- [24] Greenleaf A. & Uhlmann G. : Nonlocal inversion formulas for the X-ray transform *Duke Math. J.* **58** (1989), 205–240.

- [25] Greenleaf A. & Uhlmann G. : Microlocal techniques in integral geometry *Contemporary math.* **113** (1990), 121–135.
- [26] Groetsch C. W.: *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg, 1993 (邦訳 サイエンス社, 1996) .
- [27] Guillemin V. : On some results of Gelfand in integral geometry, *Proc. Symp. Pure Math.* **43** (1985), 149–155.
- [28] Guillemin V. & Sternberg S.: *Geometrical Asymptotics*, Mathematical Surveys **14**, AMS, 1977.
- [29] Guenther R.B., Kerber C.W., Killian E.K., Smith K.T. & Wagner S.L. : Reconstruction of objects from radiographs and the location of brain tumors, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **71** (1974) , 4884-4886.
- [30] Helgason S. : *The Radon Transform*, Birkhäuser, 1980.
- [31] Herman G.T.: *Image Reconstruction from Projections. The Fundamentals of Computerized Tomography*, Academic Press, 1980.
- [32] Hounsfield G. N.: A method and apparatus for examination of a body by radiation such as X or gamma radiation, *Patent Specification* **1283915**, The Patent Office, London, England, 1972.
- [33] Hounsfield G. N.: Computerized transverse axial scanning (tomography): Part I. Description of system, *British J. Radiology* **46** (1973), 1016–1022.
- [34] Hounsfield G. N.: Computed medical imaging, *Nobel Lecture, Science* **210** (1980), 22–28.
- [35] John F. : Bestimmung einer Funktion aus ihren Integral über gewisse Mannigfaltigkeiten, *Math. Annalen* **109** (1934), 488-520.
- [36] John F. : Abhängigkeit zwischen den Flächenintegralen einer stetigen Funktion, *Math. Annalen* **111** (1935), 541-559.
- [37] John F. : The ultrahyperbolic differential equation with four independent variables, *Duke Math. J.* **4** (1938), 300-322.
- [38] Kaczmarz S. : Angenährte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen, *Bull. Int. Acad. Pol. Sci. Lett. A.* (1937), 355–357.
- [39] Kuhl D.E. & Edwards R.Q.: Image separation radioisotope scanning, *Radiology* **80** (1963), 653–662.
- [40] Lavrentiev M. M., Romanov V. G. & Shishatskii S. P. : *Ill posed Problems of Mathematical Physics and Analysis*, AMS Translations **64**, 1985 (Russian original 1980 from Nauka, Moscow).
- [41] Logan B.F.: The uncertainty principle in reconstructing functions from projections, *Duke Math. J.* **42** (1975), 661–706.
- [42] Morrill J.E.: A Nobel prize in mathematics, *Amer. Math. Monthly* **102** (1995), 888–892.
- [43] Natterer F. : Numerik des Radonschen Problems, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.* **87** (1985), 108–126.
- [44] Natterer F.: *The Mathematics of Computerized Tomography*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- [45] Nolet G. (Ed.): *Seismic Tomography*, Reidel, 1987.
- [46] Oldendorf W.H.: Isolated flying-spot detection of radiodensity discontinuities: displaying the internal structural pattern of a complex object, *IRE Trans Bio-Med. Electron. BME*, **8** (1961), 68–72.
- [47] Orlov S.S.: Theory of three dimensional reconstruction. I. Conditions for a complete set of projections, *Sov. Phys. Crystallogr.*, **20** (1974), 312–314.
- [48] Orlov S.S.: Theory of three dimensional reconstruction. II. The recovery operator, *ibid.* **20** (1974), 429–433.
- [49] Palamodov V.P.: Nonlinear artifacts in tomography, *Dokl. Acad. Nauk SSSR* **291** (1986), 333–336.
- [50] Palamodov V.P.: Some mathematical aspects of 3D X-ray tomography, *Lectures in Applied Math.* **30** (1994), 199–210.
- [51] Phillips D. L.: A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind, *Journal of the Association for Computing Machinery*, **9** (1962), 84–97.
- [52] Quinto E. T. : Singularities of the X-ray transform and limited data tomography in \mathbf{R}^2 and \mathbf{R}^3 , *SIAM J. Math. Anal.* **24** (1993), 1215–1225.

- [53] Radon J. Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig* (1917), 262–277.
- [54] Ramachandran G. N. & Lakshminarayanan A. V. : Three dimensional reconstruction from radiographs and electron micrographs: application of convolutions instead of Fourier transforms, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **68** (1971), 2236–2240.
- [55] Shepp L.A. & Kruskal J.B.: Computerized tomography. The new medical X-ray technology, *Amer. Math. Monthly* **85** (1978), 420–439.
- [56] Shepp L.A. & Logan B. F.: The Fourier reconstruction of a head section, *IEEE Trans. Nucl. Sci.* **21** (1974), 21–43.
- [57] Smith K.T., Solomon D.C. & Wagner L. : Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977) , 1227-1270.
- [58] Tihonov A. N.: Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method, *Soviet Math. Doklady*, **4** (1963), 1035–1038.
- [59] Tuy H. K.: Reconstruction of a three–dimensional object from a limited range of views, *J. Math. Anal. Appl.*, **80** (1983), 578–616.
- [60] Tuy H. K.: An inversion formula for cone-beam reconstruction, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 546–552.
- [61] Zalcman L. : Uniqueness and nonuniqueness for the Radon transform, *Bull. London math. Soc.* **14** (1982), 241–245.
- [62] 栗田稔: 積分幾何学, 共立出版, 1956.
- [63] 斎藤恒雄: 画像処理アルゴリズム, 近代科学社, 1992.
- [64] 佐々宏一, 芦田 譲, 菅野 強: 物理探査, 森北出版, 1993.
- [65] 竹中栄一: コンピュータ断層法, 数理科学 1983 年 7 月号, pp.44–54.
- [66] 吉沢尚明: Radon 変換, 本号所収.
- [67] 画像解析ハンドブック, 東京大学出版会, 1991.